様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｈ０２８５３

研究課題名（和文）非線形波動・分散型方程式の凝縮現象の解析

研究課題名（英文）Analysis of concentration phenomena for nonlinear wave and dispersive equations

研究代表者
堤　誉志雄（Tsutsumi, Yoshio）

京都大学・国際高等教育院・特定教授

研究者番号：１０１８００２７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　13,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形発展方程式研究において初期値問題の適切性（解の存在，一意性，初期値に関する解の連続依存性の3つをあわせた概念）は基本的問題である．特に，適切性が成立する関数空間と成立しない関数空間の境目は方程式ごとの特徴に著しく依存しており，非常に興味深い．その一方で，非線形発展方程式全般に適用できる一般論を構築することは困難であり，重要な個別の方程式に対してその構造を調べ研究することが重要となる．本研究課題では，主として非線形シュレディンガー方程式にRaman散乱項や運動論的微分3次非線形項などの摂動が加わったときの初期値問題の適切性を研究し，適切となる場合と非適切となる場合があることを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
偏微分方程式に対しては，解が存在することは自明ではなく，実際解を持たない偏微分方程式も存在する．解の存在を数学的に示すためには，解が存在している関数空間を適切に設定することが重要となる．そのような関数空間を見つけることができれば，その関数空間の元であることから，解の様々な性質を導き出すこともできる．従って，初期値問題が適切となるか否かも，関数空間をいかに設定するかが決定的役割を果たす．近年では，物理学や工学においてコンピュータによる数値シミュレーションが盛んに行われている．数値シミュレーションを実行する際も，解がどのような関数空間に属するか分かれば，それに応じた計算スキームの採用が可能となる．

研究成果の概要（英文）：The well-posedness of the initial value problem is the most fundamental problem in the field of nonlinear evolution equations. The well-posedness is a concept consisting of three properties: existence of solution, uniqueness and continuous dependence of solutions on initial data. It heavily depends on the sturacture of each nonlinear evolution equation when its initial value problem is well-posed, which is very attractive. The study of the structure for each important equation has a great significance, since it is extremely difficult to construct the general theory applicable to various nonlinear evolution equations. In this research, we study the well-posedness of the initial value problem for the nonlinear Schroedinger equation with Ramman scattering term and the kinetic derivative nonlinear Schroedinger equation. We have showed that the well-posedness depends on the regularity of function spaces to which solutions belong.

研究分野：関数方程式論

キーワード：非線形波動・分散型方程式　初期値問題の適切性　初期値問題の非適切性　非線形シュレディンガー方程式　フーリエ制限法

１．研究開始当初の背景

近年非線形波動･分散型方程式の分野では, Bourgain によるフーリエ制限法と Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao[2]による I-method など，フーリエ解析と関連した新しい解析手法が開発され大きな成果をあげた．フーリエ制限法はフーリエ解析におけるフーリエ制限定理の証明方法を用いて非線形項を解析する方法で，精密な時間局所的ア・プリオリ評価を得るのに優れた方法であり，I-method は時間大域的な解のア・プリオリ評価を得るのに有効な手法である．しかし最近，短時間フーリエ制限空間や U^p, V^p 空間の導入により，フーリエ制限法自身が大幅に改良された．短時間フーリエ制限空間とは，半古典近似解析にならい時間軸を運動量（フーリエ波数）に応じて分割したフーリエ制限空間である．U^p, V^p 空間は時間変数空間において，H^1/2 の代わりをする空間であり，有界可測関数の空間に埋め込むことができることが利点である．さらに，申請者の論文[4]を含めた最近の研究により，修正 KdV 方程式や３次非線形シュレディンガー方程式のような比較的単純な方程式に対しては，線形主要部と非線形項の相互作用によって生じる共鳴現象が解の正則性に与える影響は，少なくとも時間局所的には精密に調べられるようになった．他方，時間大域的ア・プリオリ評価に関しては，I-method に加え最近，Kenig and Merle [3]が，最小爆発解論法 (minimal blowup solution argument) または臨界要素論法 (critical element argument) と呼ばれる証明方法を提唱した．それは，解のア・プリオリ評価だけでは不十分な場合に，一般解を直接扱うのではなく，最小爆発解とよばれる特殊解の性質を調べることにより（あるいは，最小爆発解が存在しないことを示すことにより），一般解を制御するという巧妙な議論である．最小爆発解の議論は，個別の問題に対して問題に応じた工夫をすることによって適用されている段階であり，統一的な理論はまだ無いと言ってよい．
以上の最近の進展を踏まえ，本研究課題では以下の（１）と（２）の研究を主に行うことを目標とした．
（１）標準的なフーリエ制限法に加え，短時間フーリエ制限空間や U^p, V^p 空間を用いて，非線形波動・分散型方程式の初期値問題の時間局所適切性（即ち，解の時間局所存在，解の一意性，初期値に関する解の連続依存性の 3 つを合わせた性質）が成立する最も広い関数空間は何かを調べる．時間局所的な結果は軽視されがちであるが，精密な解の時間局所存在定理は，解の時間大域挙動に関する情報も含んでいるため重要である．特に，解の正則性は，線形主要部と非線形項の相互作用における共鳴周波数(resonant frequency)だけでなく，準共鳴周波数(nearly resonant frequency)からも大きな影響を受ける．そこで，短時間フーリエ制限空間や U^p, V^p 空間を用いて，共鳴周波数だけでなく準共鳴周波数が解の正則性と特異性に与える影響も解明することを目指す．
（２）前項（１）の時間局所的ア・プリオリ評価を基に，I-method，最小爆発解論法の２つを融合し，非線形散乱理論，定在波解 (standing wave solution) の漸近安定性および基底状態解のエネルギーレベルを超えない一般解の漸近挙動の分類を研究する．もともと，最小爆発解論法は凝縮現象と密接な関係があり，凝縮現象を解析するのに適した手法であると言える．
さらに，非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と非圧縮性 Euler 方程式で開発された研究手法を非線形波動･分散型方程式にも適用するとともに，逆にこれら流体の方程式に対しても共鳴周波数の解の漸近挙動への影響について調べることを試みる．非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は非線形波動・分散型方程式に較べれば，はるかに複雑な方程式であるが，最近 Babin, Mahalov and Nicolaenko (1999)らの研究により，非線形分散型方程式と類似の共鳴構造を持っていることが分かってきた．これら流体力学の方程式は，研究分担者が専門としてきた方程式であり，現在までの研究の蓄積が大いに役立つと期待される．また，フーリエ制限法や I-method はフーリエ解析と密接な関係があるため，調和解析学からの観点からも研究を行うとともに，調和解析学に現れる問題（たとえば，双線形フーリエ制限定理など）との関係を探る．

２．研究の目的

非線形発展方程式において，解の正則性と特異性を解析することは重要である．特に，特異性は解の何らかの量（たとえば，解の p 乗積分ノルム）が局所的に凝縮・集中するために発生することが多い．非線形波動・分散型方程式および類似の性質を持つ流体力学的方程式を対象として，凝縮現象の観点から解の正則性･特異性および時間大域挙動について，最近進展の著しいフーリエ解析的手法（修正フーリエ制限ノルム法や I-method など）を用いて数学的に研究することを目的とする．
　具体的には，Raman 散乱項付き 3 階非線形シュレディンガー方程式や運動論的微分非線形シュレディンガー方程式に対し，初期値問題の適切性を研究する．この二つの方程式は，高周波と低周波が相互作用し高周波が出力されるような場合がもっとも評価が難しい．ソルボンヌ大学

の Philippe LeFloch 氏が京都に来て約 1 ヶ月滞在するので，非線形波動方程式の大域可解性についても研究する．

３．研究の方法

（１）（フーリエ空間における共鳴周波数と準共鳴周波数の解の正則性への影響）
研究分担者の岸本氏, 前川氏, 阿部氏と研究代表者の堤は, 非線形波動・分散型方程式に対して, フーリエ制限法, I-method および爆発解論法を用いて, 共鳴周波数や準共鳴周波数が解の正則性に及ぼす影響を解析した．特に最近進展の著しい, 短時間フーリエ制限空間や U^p, V^p 空間を用いた解析は, 解の時間局所的ア・プリオリ評価だけでなく, 大域的挙動の解析にも役立った．また,
（２）（定在波解の漸近安定性と定常特異解）
研究分担者の前田氏, 連携研究者の菊池氏および研究代表者の堤は, 定在波解に対しリアプノフの意味での安定性・不安定性, 即ち軌道安定性・不安定性の研究および非線形波動・分散型方程式の定常方程式である半線形楕円型方程式対する特異解（即ち, 特異性を持つ解）について調べた．軌道安定性は定在波の漸近安定性を調べる際の基礎となる．さらにそれを基に, 定在波解の漸近安定性を調べるとともに, 基底状態解のエネルギーレベル以下である一般解の漸近挙動を分類するため最小爆発解論法を適用した研究を行った．また, 減衰項付き非線形分散型方程式のグローバル・アトラクターの存在も, 解の平滑化効果を解析することにより研究した．
（３）（フーリエ制限法の調和解析学的観点からの研究）
連携研究者の澤野氏と研究代表者の堤は, フーリエ制限法や I-method に現れる, 波動・分散型方程式の解に対する評価式, たとえば Strichartz 評価式や解の局所平滑化評価式を, 調和解析学の立場から研究した．Strichartz 評価式はフーリエ制限定理と密接な関係があり, また局所平滑化評価式は振動積分の評価と密接な関係があることはよく知られている．したがって, 調和解析学の観点からの研究は重要であった．

４．研究成果

（2018 年度）クリスタル・ファイバーの光信号伝播モデル方程式である, Raman 散乱項付き 3 階分散非線形シュレディンガー方程式に対し, Nobu Kishimoto（数理解析研究所）と共に, 周期境界条件の下で初期値問題の適切性を調べた．Raman 散乱は, 考えている物理系と外部環境がエネルギーをやりとりする役割を果たすため, それが元の物理系にどのような影響を与えるのかは興味深い問題である．特に今年度は, Raman 散乱効果が, Raman 線形利得近似 (Raman linear gain approximation)によって表される場合を考察した．この場合, Raman 散乱項から Cauchy-Riemann 型偏微分作用素が現れるため, これを用いて Sobolev 空間では初期値問題が解を持たないような初期関数が存在することを示すとともに, ノルム・インフレーションという非常に強い意味で, 初期値に関する解の連続依存性が崩れる結果を証明した．さらに, 初期値が解析関数のときは, 抽象 Cauchy-Kowalevsky 定理を適用し, 解析関数のクラスで解が存在することも示した．この方程式は, 物理学者により沢山の数値計算がなされており, その際初期値としては, ガウスパルスあるいは超ガウスパルスが取られることが多い．今回の研究で, 通常の Sobolev 空間で数値計算は不安定であることが予想される一方で, 物理学者がよく用いる初期値では解が存在する理由も明らかになった．

（2019 年度）2019 年度は二つの研究成果を挙げた．まず, 2 次元ユークリッド空間上の減衰項と外力項付き Kadomtsev-Petviashvili II 方程式（これを(KP-II)と略記）に対して, エネルギー空間より弱い（即ち, 広い）関数空間において弱位相での大域アトラクターの存在を, Nobu Kishimoto (RIMS), Minjie Shan (CAS) との共同研究で証明した．大域アトラクターは解の時間大域挙動を決定するという点で重要である．近年の非線形波動・分散型方程式研究の進展により, 空間 2 次元においては, エネルギー空間より弱い関数空間での時間大域存在定理が証明されていた．エネルギー空間での大域アトラクターの存在はすでに知られていたが, エネルギー空間より弱い関数空間に属する解の漸近挙動は未解決であった．2 次元ユークリッド空間全体で考えるため, コンパクト性は弱位相でしか成立しない．そこで, (KP-II)の初期値問題が, 弱位相の意味で適切となることを, (KP-II)の局所平滑化効果を用いて証明した．　次に, 前年度に引き続き Raman 散乱項付き 3 階分散非線形シュレディンガー方程式に対して, Gevrey クラスにおける初期値問題の非適切性を Nobu Kishimoto (RIMS)との共同研究により証明した．ちなみに前年度は, Sobolev 空間における非適切性と解析関数の空間における適切性を証明した．

（2020 年度）フランスの高等師範学校レンヌ校の Arnaud Debussche 氏とともに, 無限次元ハミルトン系によってガウス測度がどのように伝達されるか調べた．数理物理モデルとして現れる非線形波動・分散型方程式は無限次元ハミルトン系と見なせることが多いため, この問題はこれらの方程式に対して, 解の性質を統計力学的視点を援用して調べることに相当するため重要な

研究である．今回は，3 次分散項を持つ非線形シュレディンガー方程式によってガウス測度が伝搬されたとき，その測度が元のガウス測度と互いに絶対連続となるかどうか，即ち，ガウス測度は 3 次分散項を持つ非線形シュレディンガー方程式の流れに関し準不変(quasi-invariant) となるかどうかを調べた．3 次分散項を持つ非線形シュレディンガー方程式のエネルギー汎関数の主要部が定符号とはならないので，Gibbs 測度を考えることはできない．そのため，ガウス測度が準不変か否かは重要な問題である．今回，Debussche 氏との共同研究により，自然な関数空間（ある意味で，最適と考えられる関数空間）において，ガウス測度が準不変になることを証明することに成功した．また，その証明方法は，古典的なリウビル方程式を無限次元に拡張しフーリエ制限法を適用したものであり，他の非線形波動・分散型方程式への応用も期待される．

（2021 年度）研究分担者の岸本展氏とともに，運動論的微分シュレディンガー方程式に対し初期値問題の適切性（解の存在，一意性，初期値に関する解の連続依存性の 3 つをあわせた概念）を周期境界条件の下で研究した．運動論的微分シュレディンガー方程式とは，微分シュレディンガー方程式にヒルベルト変換が作用した微分 3 次非線形項が加わった方程式である．微分シュレディンガー方程式は完全可積分であることから関数解析的手法のみならず逆散乱法による研究も多数ある．その一方で，運動論的微分シュレディンガー方程式はヘイルベルト変換が付くことにより完全可積分性がくずれることと，あるパラメータの範囲では非線形項が散逸性を持つことが知られている．微分シュレディンガー方程式に対しては，ある種のゲージ変換を施してからフーリエ制限法を適用することが有用である．しかし，運動論的微分シュレディンガー方程式では，ヒルベルト変換が作用しているため，そのゲージ変換がうまく働かないという困難が生じる．本研究では，この困難を克服するために，ヒルベルト変換が作用した微分 3 次非線形項が散逸性を持つパラメータの範囲内で，微分シュレディンガー方程式で知られていたよりも広い関数空間において初期値問題の適切性が成立することを証明した．具体的には，ヒルベルト変換が作用した微分 3 次非線形項から 1 階の楕円型作用素が現れ，それが平滑化効果を生むことを発見した．しかし，その楕円型作用素の係数は解の 2 乗積分ノルムであるため，方程式は半線形発展方程式ではなく準線形発展式となり扱いが難しくなる．今回は準線形性と平滑化効果のバランスを精密に評価することに成功した．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Arnaud Debussche and Yoshio Tsutsumi	4．巻 281
2．論文標題 Quasi-invariance of Gaussian measures transported by the cubic NLS with third-order dispersion on $\mathbf{T}$	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Functional Analysis	6．最初と最後の頁 論文番号109032
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.20021.109032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Nobu Kishimoto, Minjie Shan and Yoshio Tsutsumi	4．巻 40
2．論文標題 Global well-posedness and existence of global attractor for the Kadomtsev-Petviashvili II equation in the anisotropic Sobolev space	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6．最初と最後の頁 1283-1307
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2020078	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Kishimoto Nobu、Shan Minjie、Tsutsumi Yoshio	4．巻 16
2．論文標題 Localization estimate and global attractor for the damped and forced Zakharov?Kuznetsov equation in $\mathbb{R}^2$	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Dynamics of Partial Differential Equations	6．最初と最後の頁 317～323
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/DPDE.2019.v16.n4.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 N. Kishimoto and Y. Tsutsumi	4．巻 25
2．論文標題 Ill-posedness of the third order NLS equation with Raman scattering term	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Math. Res. Lett.	6．最初と最後の頁 1447-1484
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/MRL.2018.v25.n5.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 T. Miyaji and Y. Tsutsumi	4．巻 31
2．論文標題 Local well-posedness of the NLS equation with third order dispersion in negative Sobolev spaces	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Differential and Integral Equations	6．最初と最後の頁 111-132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　8件／うち国際学会　6件）

1．発表者名 堤誉志雄
2．発表標題 非線形分散型方程式と関数空間
3．学会等名 2021年度日本数学会秋季総合分科会　企画特別講演（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Yoshio Tsutsumi
2．発表標題 Ill-posedness of the third order NLS with Raman scattering term
3．学会等名 Advances in Nonlinear Dispersive Equations: Challenges and Perspectives（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Yoshio Tsutsumi
2．発表標題 Local well-posedness of the Cauchy problem for the kinetic DNLS on T
3．学会等名 Harmonic Analysis and Dispersive PDEs: Problems and Progress（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年

1．発表者名 Y. Tsutsumi
2．発表標題 Ill-posedness of the third order NLS with Raman scattering
3．学会等名 第36回九州における偏微分方程式研究集会（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Y. Tsutsumi
2．発表標題 Ill-posedness of the third order NLS equation with Raman scattering term
3．学会等名 国立成功大学数学系コロキウム（台湾）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Y. Tsutsumi
2．発表標題 Quasi-invariance Gaussian measures for NLS with third order dispersion
3．学会等名 国立成功大学数学系コロキウム（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 堤 誉志雄
2．発表標題 Well-posedness and smoothing effect for nonlinear dispersive equations
3．学会等名 2017年度日本数学会秋季総合分科会 総合講演（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Yoshio Tsutsumi
2．発表標題 Localization estimate of solution for the 2D damped and forced Zakharov-Kuznetsov equation
3．学会等名 The JAMI 2018 Second Workshop at Johns Hopkins University（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	前田　昌也 (Maeda Masaya) (40615001)	千葉大学・大学院理学研究院・准教授 (12501)	Analysis of stability of standing waves
研究分担者	前川　泰則 (Maekawa Yasunori) (70507954)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	Analysis of regularity and singularity of solutions to nonlinear evolution equations
研究分担者	阿部　健 (Abe Ken) (80748327)	大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授 (24402)	Analysis of regularity and singularity of solutions to nonlinear evolution equations
研究分担者	岸本　展 (Kishimoto Nobu) (90610072)	京都大学・数理解析研究所・講師 (14301)	Fourier analysis and analysis of nonlinear evolution equations

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Nonlinear Wave and Dispersive Equations	2017年～2017年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	北京大学			
フランス	Ecole Normale Superieure de Rennes			