

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2017～2019

課題番号：17H04825

研究課題名(和文) 数学的アプローチによる様々な流体物理現象の解明

研究課題名(英文) Mathematical analysis of various fluid flow phenomena

研究代表者

米田 剛 (Yoneda, Tsuyoshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30619086

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,700,000円

研究成果の概要(和文)：体積保存する微分同相写像群の中心拡大から導かれるコリオリ力付き非圧縮オイラー流に対する断面曲率を考え進めた。台風など地球規模の流体運動を洞察する際、コリオリ力は欠かせない。方程式に潜むリー代数構造に着目することで、そのコリオリ力が有するある種の安定化効果を導き出した。zeroth lawは流体運動が乱流であるための重要な指標であり、その数学解析を進めた。より具体的には「エネルギー散逸率の非粘性極限の非消散」をほぼ実現している3次元ナビエ-ストークス方程式の解の列を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

zeroth lawは流体運動が乱流であるための最も重要な指標の一つであるにも関わらず、それ自体の数理的理解を目指した研究は皆無であった。本研究によって、そのzeroth lawが渦伸長によって引き起こされ得ることを数学的に初めて示された。今後、このzeroth lawの数理的理解を皮切りに新たな乱流理解が促進される可能性があり、その意味で学術的意義が大きい。また、台風といった地球規模の流体運動の解明にはコリオリ力付き流体方程式が必要不可欠であるが、リー代数を使ってそのコリオリ力の数理的理解を目指した研究は存在しない。新たな研究視点を切り開いたという点において、この研究の学術的意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：We investigated the geometry of a central extension of the group of volume-preserving diffeomorphisms of the 2-sphere, whose geodesics are corresponding to solutions of the incompressible Euler equation with the Coriolis force. In particular, we calculated the Misiolek curvature of this group. This value is related to the existence of a conjugate point and its positivity directly implies the positivity of the sectional curvature. Also we mathematically considered the zeroth law. More precisely, we prepared small-scale vortex blob and large-scale anti-parallel vortex tubes for the initial data, and showed that the corresponding 3D Navier-Stokes flow creates instantaneous vortex-stretching. In turn, using this stretching, we showed that the flows satisfy a modified version of the zeroth law (but very close to the actual one) in a uniform time interval which in particular implies enhanced dissipation.

研究分野：数理流体力学

キーワード：Navier-Stokes方程式 Euler方程式 zeroth law 渦伸長 乱流の素過程 コリオリ力 微分同相写像群 共役点

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Clay 財団は 2000 年に、数学の未解決問題を 7 つ挙げた。そのうちのひとつが「3 次元 Navier-Stokes 方程式の滑らかな解は時間大域的に存在するのか、または解の爆発が起こるのか」である。この未解決問題は Leray(1934)から始まり、Fujita-Kato(1964)による強解の結果によって飛躍的に進展したが、最終的な解決には至っていない。その原因として、流体方程式に本質的に内在する非線形作用を深く洞察する為の数学解析道具が十分にそろっていないからだと思われる。一方で、その非線形作用によって生成される乱流は、今も活発に研究が発展している。しかしながら、乱流研究サイドでも、非線形作用そのものを扱うのは大変難しく、「渦粘性」といった近似概念、そして「統計」が主な解析道具となる(最近では、流体運動の非線形性をうまくとらえられていると期待できる「リザーバー・コンピューティング(機械学習)」も発展してきている)。いずれにしても、一見すると、数学・物理両分野が全く別の研究を行っているように見えるが、扱っている対象は同じ「非線形作用」である。数学・物理二つの研究分野が別々に行っている「非線形作用の洞察」を積極的に融合させていかなければならない、と研究開始当初に思い至った。これが本研究の背景である。

2. 研究の目的

様々な流体物理現象に内在する非線形作用の数理的理解を飛躍させるために、乱流モデルといった近似化モデルを一切使わずに、Navier-Stokes 方程式や Euler 方程式そのものを使った数学的洞察を促進させたことが本研究の目的である。より具体的には(a)リー代数を使った 2 次元非圧縮 Euler 方程式の洞察、特に微分同相写像群を使った非線形作用の数理的理解の促進(b)乱流運動における非線形作用の要である「渦伸長」の数理的理解、特に 3 次元 Navier-Stokes 方程式そのものを使った zeroth law 等の乱流メカニズムの解明、となる。この研究目的は、当初の私自身の研究結果によって動機づけられたものであり、独創性の高いものとなっている。

3. 研究の方法

多岐に渡る数学解析道具を想定しながら、流体運動の非線形作用の数理的理解を深めることに努めた。リー代数に詳しい田内大渡氏をポスドクとして雇用し、彼との議論をもとにそのリー代数・微分同相写像群を使った非圧縮 Euler 方程式の洞察を進めた。また、非圧縮 Euler 方程式・Navier-Stokes 方程式の数学解析に詳しい In-Jee Jeong 氏(現：ソウル国立大)と共に zeroth law 等の乱流メカニズムの数学的洞察を進めた。

4. 研究成果

主な研究成果は「乱流の素過程である vortex stretching (3D), vorrex thinning (2D)の数学解析」を推進させたことと「微分同相写像群による非圧縮非粘性流の数学解析」の推進にある。

まずはその 3 次元流の vortex stretching の研究成果を説明する。In-Jee Jeong 氏との共同研究によって vortex stretching と zeroth law との関連を明らかにした。Zeroth law とは「エネルギー散逸率の非粘性極限の非消散」すなわち、Navier-Stokes 方程式の粘性係数をゼロへ飛ばしたとき、解のエンストロフィー(渦度の L^2 ノルムの二乗)が粘性係数に反比例するオーダーで無限大に発散することを意味する。これは流れが乱流であるための最も重要な指標の一つであり、特に Onsager 予想の起源となっているが、この zeroth law 自体の数理的理解を目指す研究は文字通り皆無であった。それが可能になったのは、Bourgain-Li(2015)や Kiselev-Sverak(2014)等による Euler 方程式研究の breakthrough が起きたからに他ならない。それら最新の解析手法を駆使することで、zeroth law と数学解析との接点を、世界で初めて明らかにすることが出来た。より具体的には、小スケールの渦と大スケールの anti-parallel な渦管を初期値とした場合の 3 次元 Navier-Stokes 流が「瞬間的な渦伸長」を引き起こすことを示し、そのことによって修正版 zeroth law (しかしながら実際の zeroth law に限りなく近いもの)が生成されることを数学的に証明した。

以下、2 次元流に対する研究成果を説明する。3 次元流とは違い、Kraichnan (1967)による 2 次元乱流のエネルギー逆カスケードの理論的予想(現在では現象論的な正しさが確認されている)が存在する。2 次元乱流のエネルギー逆カスケードとは、エネルギー注入によって駆動された 2 次元乱流において、エネルギーが高周波から低周波へ流れることである。2 次元乱流では、このエネルギー逆カスケードによって最終的には大スケール(低周波帯)の渦が安定的に生き残ることが広く知られており、そのメカニズム解明は実用上も重要である。これを物理の世界では「自己組織化」という。木星の帯状流(低周波の流れ)の安定的存在が好例である。しかしながら、その物理的重要性に反して、エネルギー逆カスケードの数理的メカニズムは、完全なる非線形現象ということもあり、ほとんど未知のままである。その解明に対する最初の一步は、やはり「大スケールと小スケールの渦の非線形相互作用」に対する洞察になるだろう。ここで注意しておきたいことがある。もちろん、せん断流(大スケールの渦)に対する安定性・不安定性の研究はす

で多数存在する。しかしながら、それらのほとんどは、方程式を線形化したものに対する安定性解析、或いはせん断流自身が無限のエネルギーを有するものである。有限エネルギーを持つ大スケールの渦との真の非線形相互作用に着目した研究は、近似化方程式に対する膨大な先行結果と比べると少数である。

そういった「大スケールと小スケールの渦」に対する非線形メカニズム、特に vortex thinning は 2 次元乱流における主要なメカニズムのひとつとされる。そのことが Xiao-Wan-Chen-Eyink (2009)による 2 次元 Navier-Stokes 方程式(小スケールに外力注入、大スケールにダンピング項を入れた修正版方程式)に対する大規模数値計算によって指摘されている。その先行結果を踏まえたうえで、Jeong 氏と私は、大スケールの渦が小スケールの渦を伸長させるような初期値列を構成し、その初期値列による vortex thinning が enhanced dissipation を引き起こすこと、すなわちエンストロフィー散逸がレイノルズ数の逆数よりも真にゆっくりと減衰すること(3次元乱流のときの zeroth law と同じく、2次元乱流が有するべき自然な現象)を数学的に厳密に証明した。

2次元流に対する研究成果として、次の微分同相写像群の結果も挙げられる。非圧縮非粘性流には微分同相写像群の深い数理的構造が潜んでおり、その構造理解が2次元流の非線形メカニズムの解明につながるのではないかと予想している。そういった群を使った流体研究は V. Arnold: Ann. Inst. Fourier (1966)の次のような言及から始まったと言える「オイラーによる剛体の運動は R^3 の回転群上の左不変距離の測地線である。そのことを踏まえると、高次元非圧縮流体などの群に対しても同様の方程式を得ることができる。」Arnold のこの論文はかなり有名であるにもかかわらず、それに続く研究が(解析学サイドと比べて)多くあるようには見受けられない。いずれにしても非線形作用の解明を最終目標と定めつつ、まずは非圧縮 Euler 流の共役点の存在性・曲率を考え進めた(田内大渡氏との共同研究)。実際のところ、幾何学サイドでも、曲率・共役点のあり方を調べることは、様々な多様体の大域的構造を調べる際に重要である。大胆に言い換えると、様々な多様体の大域的構造と「非線形作用」による流体の時間大域挙動のメカニズムは深く関連する。そのような状況のもと、Misiólek: Proceedings AMS (1996)では、微分幾何学的な判定条件を構築し、その共役点の存在性を論じている。ただ、背後の多様体はもっぱら平面であり、球面や楕円面における共役点の存在性を論じた研究は今まで皆無であった。そこで我々はその判定条件を使って、背後の多様体が楕円面となる場合の非圧縮オイラー方程式(及びコリオリ力付きのオイラー方程式)における共役点の存在性を証明した。ただし、厳密には、体積保存する微分同相写像群の中心拡大においては、その判定条件が満たされることを示しただけである。共役点の存在そのものに関しては未解決であり、今後の証明課題である(コリオリ力付きオイラー方程式は、その体積保存する微分同相写像群の中心拡大に対応する)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 T. Tauchi and T. Yoneda	4. 巻 -
2. 論文標題 Positivity for the curvature of the diffeomorphism group corresponding to the incompressible Euler equation with Coriolis force	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/ptep/ptab043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 I.-J. Jeong and T. Yoneda	4. 巻 34
2. 論文標題 Enstrophy dissipation and vortex thinning for the incompressible 2D Navier-Stokes equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1837
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 I.-J. Jeong and T. Yoneda	4. 巻 -
2. 論文標題 Vortex stretching and enhanced dissipation for the incompressible 3D Navier-Stokes equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-020-02019-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 I.-J. Jeong and T. Yoneda	4. 巻 39
2. 論文標題 Three-dimensional Euler flow generating instantaneous vortex stretching and related zeroth law	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nagare: Journal of Japan Society of Fluid Mechanics: ながれ	6. 最初と最後の頁 230-239
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 L. Lichtenfelz and T. Yoneda	4. 巻 21
2. 論文標題 A Local Instability Mechanism of the Navier-Stokes Flow with Swirl on the No-Slip Flat Boundary	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00021-019-0424-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計7件(うち招待講演 7件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Quasi-streamwise vortices and enhanced dissipation for the incompressible 3D Navier-Stokes equations
3. 学会等名 analysis and PDEs seminar, Cergy Paris Universite (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Vortex stretching and enhanced dissipation for the incompressible 3D Navier-Stokes equations
3. 学会等名 International Workshop on Multi-Phase Flows: Analysis, Modelling and Numerics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Lorenzo Brandolese, Isabelle Gallagher, Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Recent topics on well-posedness and stability of incompressible fluid and related topics
3. 学会等名 Summer Graduate School, Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 瞬間的な渦伸長を生成する3次元Euler流・それに関連するzeroth lawについて
3. 学会等名 京都大学応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Instantaneous vortex stretching and energy cascade on the incompressible 3D Euler equations
3. 学会等名 KIAS workshop, Mathematics of Fluid Motion II: Theory and Computation（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Instantaneous vortex-stretching and anomalous dissipation on the 3D Euler equations
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Yoneda
2. 発表標題 Instantaneous vortex-stretching and anomalous dissipation on the 3D Euler equations
3. 学会等名 2018 International Conference on Mathematical Fluid Dynamics School of Mathematics and Information Science (Henan Polytechnic University)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 米田剛	4. 発行年 2020年
2. 出版社 SGCライブラリ(サイエンス社)	5. 総ページ数 114
3. 書名 数理流体力学への招待	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------