科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔令和２(2020)年度 研究進捗評価用〕

平成２９年度採択分
令和２年３月３１日現在

代数幾何と可積分系の融合 –理論の深化と数学・数理物理学における新展開–

Algebraic geometry and Integrable Systems – Deepning of Theory and New Developments in Mathematics and Mathematical Physics –

課題番号：17H06127

齋藤　政彦（SAITO　MASA-HIKO）

神戸大学・数理・データサイエンスセンター・教授

研究の概要

稲場・岩崎・齋藤は，パンルヴェ方程式など可積分系に現れる相空間を放物接続束のモジュライ空間の族として捉え，モノドロミー保存変形の幾何学の基礎理論を確立した．この相空間の構造を放物 Higgs 束，混合ツイスターＤ加群の理論と関連付け，WKB 解析の幾何学，量子曲線と位相的漸化式，ミラー対称性，幾何学的ラングランズ対応の数学的理解を深める．

研　究　分　野：代数学

キ　ー　ワ　ー　ド：可積分系，モジュライ空間，モノドロミー保存変形，量子コホモロジーとミラー対称性，混合ツイスターD 加群

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ微分方程式の相空間の代数幾何学的研究から，代数曲線上の放物接続のモジュライ空間の族およびモノドロミー保存変形の理論が，稲場・岩崎・齋藤により基礎づけられた．放物接続と放物 Higgs 束を繋ぐ $\hbar$-接続の概念により，WKB 解析を含む漸近解析の幾何学の展開が可能になりつつある．Eynard-Orantin の量子曲線と位相的漸化式による量子不変量の計算，Lisovy らによるパンルヴェ方程式のτ関数の Virasoro 代数の共形ブロックによる級数展開など数学・数理物理学的に関連する新しい展開がみられる．

代数幾何学における極小モデル理論の発展，望月による混合ツイスターＤ加群の理論の構築も含めて，上記の理論を理解する接続・Higgs 束のモジュライ空間の幾何学の精密化，そして関連するミラー対称性や幾何学的ラングランズ対応の数学的理解が望まれている．

２．研究の目的

パンルヴェ方程式等の可積分系に表れる相空間を放物接続のモジュライ空間として捉え，接続のモノドロミー保存変形の方程式の解やτ関数の漸近展開，特に WKB 解析を h-接続のモジュライ理論として，自然に定式化し，数学的に深く理解する事である．

Eynard-Orantin の位相的漸化式の理論，モノドロミー保存τ-関数の予想の数学的背景を明らかにする．また，接続や Higgs 場のモジュライ空間の代数幾何学的研究により幾何学的ラングランズ対応や，ミラー対称性の数学的理解を深める．

３．研究の方法

研究組織のメンバーは，個々の研究者の研究の独自に進め，分野内・分野横断のセミナー，研究集会により，代数幾何学と可積分系の最新の結果の相互理解を深める事に重点を置き研究を進めている．併せて，海外の当該分野の専門家と共同研究し，研究を推進する．

４．これまでの成果

①　モノドロミー保存変形の漸近展開の幾何学の確立

モノドロミー保存変形の幾何学で，残っていた分岐する不確定の場合が稲場によって確立されつつある．齋藤・Szabo は，接続や Higgs 束のモジュライ空間に見かけの特異点とその双対を用いた標準座標の理論を構築し，モジュライ空間が底曲線上の有理余接直線束の全空間からなる代数曲面の点のヒルベルト概形と双有理的である事を示した．稲場は，確定特異点の不確定特異点への合流操作を代数幾何的に定式化した．一方，岩木・小池・竹井らは，ガウス型線形接続の合流族

の WKB 解析に現れる Voros 係数が Eynard-Orantin の位相漸化式で表示される事が示した．また，岩木らは 6 種類のパンルヴェ方程式系の $\hbar$-接続の Lax 形式が，位相的漸化式を満たし．モノドロミー τ 関数の $\hbar$-展開を決定できることを示した．

② 高次元双有理幾何学の研究とその可積分系への応用

森の 3 次元から 2 次元への extremal 縮約の分類，並河の高次元シンプレクテック特異点の特徴付け，吉岡のエンリケス曲面上のベクトル束のモジュライ空間の研究，佐野の **Q**-Fano 多様体の変形, K3 曲面のアファインコーンの smoothing の研究，三井の正標数の代数群のトーサーの研究が行われた．離散および連続のパンルヴェ方程式系の幾何学な明示的研究は，山田・太田・野海らによって，発展してきた．特に山田は，パデ法により楕円差分ガルニエ系のラックス形式を構成した．
曲線上の接続, Higgs 束のモジュライ空間の，ラグランジュアンファイブレーションの構造，幾何学的ラングランズ対応も研究が進んでいる．

③ 種々の量子不変量のモジュライ空間，ミラー対称性の数学的な理解

岩木らの GKZ 微分方程式と位相的漸化式の研究，名古屋のモノドロミー τ 関数の展開などの研究で成果が得られている． また，細野・高木が，射影空間の直積のある種の完全交叉 Calabi-Yau 多様体について，より精密なミラー対称性を示した．

2018 年，京都大学数理解析研究所で国際研究集会「D-modules, quantum geometry and related topics」，2019 年，フランスのブルゴーニュ―大学で「Geometry and Integrable Systems」を開催した．

５．今後の計画

研究課題①については，$\hbar$-接続のモジュライ空間の族の上で，WKB 解析を再構築し，量子曲線と位相的漸化式の幾何学の背景を明らかにする．
研究課題②については，離散・連続のパンルヴェ型方程式系の相空間の幾何学を展開し，幾何学的ラングランズ対応を研究する．
研究課題③については，研究課題①，②の成果により，各種相関関数を計算し，さらには，ミラー対称性予想などの数学的理解を深める．2020 年度か，2021 年度に国際研究集会を開催し，研究の総括を行う．

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）
【発表論文】

① T. Mochizuki, Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles., Trans. Amer. Math. Soc., 373 (no. 1), 551--596, 2020.
② M. -a. Inaba, Unfolding of the unramified irregular singular generalized isomonodromic deformation,
Bull. Sci. math. 157 （2019）, 102795, 121 pp.
③ Y. Ohnita, Minimal Maslov number of R-spaces canonically embedded in Einstein-Kähler C-spaces, Complex Manifolds, 6, 303--319, 2019.
④ K. Iwaki, T. Koike, Y. Takei, Voros coefficients for the hypergeometric differential equations and Eynard-Orantin's topological recursion: Part II: For confluent family of hypergeometric equations., J. Integrable Syst., 4 (no. 1), xyz004, 46 pp. 2019.
⑤ S. Coughlan, T. Sano, Smoothing cones over K3 surfaces. Épijournal Geom. Algébrique, 2, Art. 15, 10 pp. 2018.
⑥ Y. Yamada, An elliptic Garnier system from interpolation, SIGMA, **13,** 069, 8 pages, 2017.
【著書（編者）】
⑦ Iohara, K., Malbos, P., Saito, M.-H.,Takayama, N.(Eds.), Two Algebraic Byways from Differential Equations:Gröbner Bases and Quivers, Algorithms and Comput. in Math. **28,** Springer, 2020, 371pp.

7. ホームページ等

http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop-j.html