科学研究費助成事業（基盤研究（Ｓ））公表用資料
〔令和２(2020)年度 研究進捗評価用〕

平成２９年度採択分
令和２年３月３１日現在

幾何的トポロジーと写像の特異点論の革新的研究

Innovative Research of Geometric Topology and Singularities of Differentiable Mappings

課題番号：17H06128

佐伯　修（SAEKI, OSAMU）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

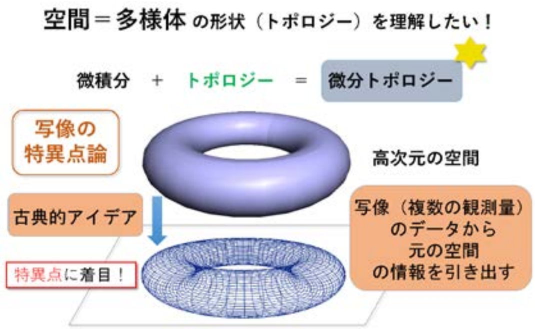
研究の概要（４行以内）
具体的か構成的な幾何的アイデアを写像の特異点論に導入し、既存の概念・手法等を革新して特異点論の飛躍的発展を図る。逆に幾何的トポロジーに写像の特異点論から新しい道を切り開き、重要な問題の解決を図る。さらに、次世代カタストロフィー理論を創成し、諸科学分野や産業界への応用を通して、トポロジーに革新的展開をもたらすことも目指す。

研　究　分　野：位相幾何学

キ　ー　ワ　ー　ド：微分位相幾何学、特異点論、低次元トポロジー、データ可視化

１．研究開始当初の背景

トポロジーでは、図形や空間を連続的に変形しても変わらない性質、つまりその本質的形状を理解することが目的である。たとえば高次元空間を観るため、2 次元や 3 次元への写像を用いることができるが、その際、特異点を調べることが本質的に重要である。



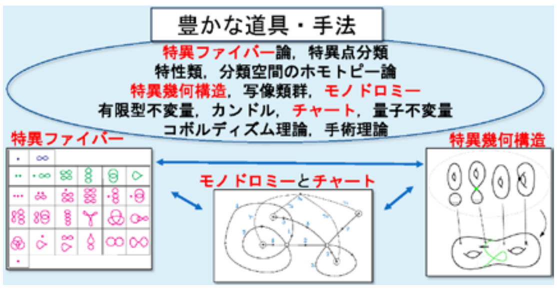
20 世紀半ばに生まれた微分トポロジーは、ミルナーによる異種微分構造発見で数学界に衝撃を与えたが、そこでは関数の特異点が重要な役割を果たした。その後トムは特異点論に基づくカタストロフィー理論を提唱し、種々の現象解析へ応用した。一方 1980 年代にはトポロジーに強力な解析的手法が導入されたが、これは残念ながらあまり構成的でない。解析的手法の発展が一段落した近年、具体的かつ構成的アイデアに基づく幾何的トポロジーの重要性が再認識されつつある。

２．研究の目的

こうした流れの中、本研究では、そうした具体的かつ構成的な幾何的アイデアや、低次元トポロジー固有の豊かな理論を写像の特異点論の世界に持ち込むことで、既存の概念・定式化・手法を革新し、特異点論の飛躍的発展を図る。そして逆に、幾何的トポロジーに特異点論から新しい道を切り開き、重要な問題の解決を図る。さらには新研究領域、いわば次世代カタストロフィー理論を創成し、諸科学分野や産業界への応用を通して、学問分野としてのトポロジーに新たな展開をもたらすことも目指す。

３．研究の方法

代表者佐伯が創始した特異ファイバー論、最近注目されている特異幾何構造とその変形理論、バシリエフ型不変量の理論、分担者遠藤が世界を牽引している写像類群とモノドロミーの理論を駆使する。分担者鎌田が考案した、ブレイド群や写像類群を可視化するチャートの概念を用い、幾何的に理解されていない量子不変量等を統一的に扱う。分担者大本の特性類理論と分担者岩瀬の高度なホモトピー論を用い、特異点消去の研究も組織的に行う。さらに、分担者石川の実特異点技法を用いて、3 次元多様体上の安定写像と量



子不変量の関係の明確化、4 次元可微分ポアンカレ予想への貢献も目指す。こうした手法を基に、代表者、分担者、連携研究者、研究協力者の間で密に連絡を取りながら研究を推進してゆく。また、そのために国際研究集会を開催し、当該分野の活性化を図る。

４．これまでの成果

多様体対上の写像の特異ファイバーを分類し、普遍複体のコホモロジー群を計算することで、対応する同境群の非自明性を初めて示すことができた。多様体対のうち、補空間が 2 色で色付けられたもののなす同境群も定式化し、その場合には特異ファイバーを用いた不変量が完全不変量を与えることも示した。これらは、多様体対の場合にも特異ファイバーが同境群をとらえる際に極めて本質的な役割を果たすことを示しており、今後の多様体対の研究に重要な知見を提供する。

さらに、4 次元多様体上の写像の単純化アルゴリズムを構成的に確立し、特異レフシェッツ束構造から単純化された trisection を構成する手法を編み出した。その結果、特異シンプレックティック構造に対し、対応する特異レフシェッツペンシル構造が存在するというオルー・ドナルドソン・カザルコフの結果に構成的な位相的証明を与えることに成功した。これらの成果は当該分野に大きなインパクトを与え、該当する論文が雑誌編集局からの招待論文[1]として掲載された。

佐伯は、3 次元多様体上の安定写像の新しいバシリエフ型不変量を構成することにも成功した。以前の定義は 4 次元多様体上の安定写像を用いるもので、3 次元多様体上の写像から直接的に定義されるものではなかった。我々は 3 次元多様体上の安定写像の非特異ファイバー達から決まる絡み数行列を定式化し、その符号数を用いることで不変量の新しい公式を導出した。その結果、我々の絡み数行列の符号数から定義される不変量が、新たに有限型不変量となることがわかった。

佐伯はさらに 3 次元多様体上の安定写像について研究し、それらの非特異ファイバーからなる絡み目と、特異点集合からなる絡み目の位置関係について詳しく調べた。その結果、非特異ファイバーを与えたとき、その補空間の絡み目が、安定写像の特異点集合として現れるための必要十分条件を、相対特性類を用いて記述することに成功した。それを用いて、非特異ファイバーと特異点集合が互いに絡まないことがあることを突き止め、そのような安定写像の具体例も初めて与えた。また、特異点集合が非特異ファイバーと絡まない場合に、特異点集合を無限遠に逃がすことで、非コンパクト 3 次元多様体内に与えられた絡み目が平面への沈め込みのファイバーとして現れるための必要十分条件に関する既存の結果に対して、特異点論的な新しい証明を与えることにも成功した。

その他、諸科学分野への応用についても研究し、結晶のらせん転位の数学的記述とエネルギーの計算について結果を得た。

また雇用した学術研究員は、特異点論を使って正の位相的場の量子論の具体例を構成することに成功したほか、25 年来の未解決問題であったミルナーによる 7 次元異種球面上の特異写像に関する問題を解決するなど、顕著な活躍を行った。

５．今後の計画

特異ファイバーと多様体の可微分構造との関係はあまり明らかにされていない。そこで特異ファイバーに関するホモトピー原理をより詳しく調べる。もし特異ファイバーの消去がホモトピー原理に従うのであれば、可微分構造の情報は捉えられないことになる。特異ファイバーに対して、どのようなときにホモトピー原理が成り立ち、どのようなときに成り立たないのかをはっきりさせることは今後の重要な課題である。

写像のバシリエフ型不変量については、3 次元の場合に新しい不変量を提案したが、それと既知の不変量を組み合わせたものがすべてであるかどうか調べることが残っている。そのため、4 次元や 5 次元多様体上の安定写像の特異ファイバーの隣接関係を調べ、普遍複体を構成してコホモロジーを計算しなければならないが、その作業は困難を極める。そこでこうした作業を研究分担者、研究協力者と注意深く進めてゆく。3 次元多様体上の整数値のバシリエフ型不変量の研究はこれまでになく、これができれば 3,4 次元多様体論に新しい観点を導入することになる。

諸科学分野への応用では、多目的最適化理論におけるパレート解集合の大域的研究に特異点論が重要な役割を果たすことが研究協力者らの最近の研究で明らかにされてきた。今後は特異ファイバー理論を組み合わせ、パレート解集合を可視化することが求められており、可視化分野の研究協力者と共同で佐伯が研究を進める。実問題への応用上、極めて重要な研究課題である。

６．これまでの発表論文等（受賞等も含む）

[1] R.I. Baykur and O. Saeki, Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 115 (2018), 10894—10900.

[2] O. Saeki, A signature invariant for stable maps of 3-manifolds into surfaces, Proc. 7th Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Sing., Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 64 (2019), 541—563.

7. ホームページ等

http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/