

令和元年6月5日現在

機関番号：14303

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06785

研究課題名(和文) Bost-Connes系の分類問題について

研究課題名(英文) On the classification problem of Bost-Connes systems

研究代表者

武石 拓也 (Takeishi, Takuya)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・助教

研究者番号：20784490

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：Bost-Connes  $C^*$ -環は、代数体をもとにして構成される作用素環である。この $C^*$ -環の同型問題は重要未解決問題であったが、この研究ではこの問題を完全に解決した。代数体 $K, L$ に対応するBost-Connes  $C^*$ -環 $A_K, A_L$ が同型ならば、 $K$ と $L$ は同型であるということを証明した。その他、代数体に由来する他の種類の $C^*$ -環の研究にも取り組んだ。こちらは、KMS状態に関する結果があり、論文執筆中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環の同型・非同型を決定することは作用素環論の根源的な課題であり、今回得られた結果は作用素環論として非常に興味深い結果である。それにとどまらず、作用素環論と数論の2つの分野の分野横断的な研究(特に作用素環論の数論への応用)の可能性を感じさせる結果でもある。今回の結果を通じて得られた代数体の不変量に関する研究など、後に続く重要な研究課題が同時に生まれている。総合して、数学の様々な側面から見て価値を持つ研究結果が得られたと考えている。

研究成果の概要(英文)：The Bost-Connes  $C^*$ -algebras are operator algebras coming from number fields. The classification problem of the Bost-Connes  $C^*$ -algebras has been an important open problem. In this research, we have completely solved this problem. Concretely, we proved that for two number fields  $K$  and  $L$ , if two Bost-Connes  $C^*$ -algebras  $A_K, A_L$  are isomorphic, then  $K$  and  $L$  are isomorphic. In addition, we worked on another type of  $C^*$ -algebras coming from number fields. For this type of  $C^*$ -algebras, we are writing an article on KMS-states.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環論  $C^*$ -環論 Bost-Connes系  $K$ -理論 KMS状態 非可換幾何学

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

Bost-Connes 系は代数体から構成される  $C^*$ -環である。代数体  $K$  に対して Bost-Connes  $C^*$ -環  $A_K$  が定義される。研究開始当時、代数体  $K, L$  に付随する Bost-Connes 系が  $\mathbb{R}$ -同変同型だったとき、もとの体  $K, L$  は同型であるかという問題 (Bost-Connes 系の分類問題) が重要未解決問題であった。研究開始時までの結果で判明していたことは、代数体の狭義類数と Dedekind zeta 関数が Bost-Connes  $C^*$ -環の不変量となっているということであった。

### 2. 研究の目的

上記の分類問題に取り組むことが本研究の目的である。特に、研究開始時の意図としては、上記の問題に対して反例を探ること、つまり異なる代数体に対して Bost-Connes 系が同型になるような例を探ることを目標としていた。しかし、後述するように、予想を裏切る形で Bost-Connes 系はすべて非同型であることが判明し、分類問題が肯定的に解かれた。

### 3. 研究の方法

Filtered  $K$ -理論を用いることによって  $C^*$ -環から情報を取り出すというアプローチである。 $K$ -理論とは  $C^*$ -環から定まるアーベル群であり、位相幾何学の  $K$ -理論から導入された概念である。filtered  $K$ -理論とは、非単純環を扱うために、そこで現れる商  $C^*$ -環などの  $K$ -理論の情報を総合して扱うというものである。何らかの方法で、Bost-Connes 系の情報が filtered  $K$ -理論の部分に集約されていることが示せるのではないかというのが、研究開始時に期待していたことであった。結果的にこの予想は正しく、filtered  $K$ -理論が期待以上の情報を持っていたがために、Bost-Connes 系の完全分類という結果につながった。

### 4. 研究成果

(1) 本研究の最大の成果として、上記の分類問題を肯定的に解決した。すなわち、代数体  $K, L$  に対して Bost-Connes  $C^*$ -環  $A_K$  と  $A_L$  が同型ならば、 $K$  と  $L$  は同型である。この定理は [1] および [2] を組み合わせることで証明されるが、[2] が今回の研究における結果である。その過程で代数体の完全不変量

$$(K_*(B_K^F), K_0(B_K^F)_+, \partial_K^{F,p})_{F,p}$$

が filtered  $K$ -理論を通じて得られている。ここで、 $F$  は  $\mathcal{P}_K$  の有限部分集合を動き (ただし、 $\mathcal{P}_K$  は  $K$  の有限素点全体)、 $p$  は  $\mathcal{P}_K \setminus F$  を動く。この不変量は可算個の次数付きアーベル群

$$K_*(B_K^F) = K_0(B_K^F) \oplus K_1(B_K^F)$$

と、 $K_0$ -群の順序構造  $K_0(B_K^F)_+$  と、可算個の次数 1 の準同型

$$\partial_K^{F,p}: K_*(B_K^F) \rightarrow K_*(B_K^{F \cup \{p\}})$$

からなる。 $C^*$ -環  $B_K^F$  は composition factor と呼ばれる Bost-Connes  $C^*$ -環の基本構成因子である。作用素環論を通じて代数体の完全不変量が得られているということ自体が非常に興味深い現象であり、この不変量を通じて将来的には作用素環論の数論への応用がありうると考えている。

また、この結果に付随して、アーベル群の接合積に関して以下の結果を証明した。 $\Gamma$  を自由アーベル群とし、 $G_1, G_2$  を  $\Gamma$  の副有限完備化とする。 $G_1, G_2$  はいずれも有限生成アーベル群を稠密に含むものとする。このとき、連続関数環  $C(G_1), C(G_2)$  に掛け算作用を考えて接合積をとった  $C^*$ -環をそれぞれ  $A_1, A_2$  とする。このとき、 $K$ -理論の同型写像

$$\varphi: K_*(A_1) \rightarrow K_*(A_2)$$

が共通の部分群  $K_*(C_r^*(\Gamma))$  を保つ写像ならば、コンパクト群としての同型写像

$$\Phi: G_1 \rightarrow G_2$$

であって、共通の部分群  $\Gamma$  を保つものが存在する。この定理は、自由アーベル群の副有限作用に関しては、 $K$ -理論における  $K_*(C_r^*(\Gamma))$  の位置から力学系を復元できることを意味している。

主定理の証明は、Bost-Connes  $C^*$ -環の間の同型写像があったとき、各 composition factor  $B_K^F$  において上記の一般的な復元定理の仮定が満たされていることを示すことが最もテクニカルな部分である。ひとたびそれが示されると、それぞれの副有限作用をうまく張り合わせることで、Bost-Connes 力学系が復元される。ここまでが今回の研究における成果である。残された問題は、Bost-Connes 力学系から代数体を復元する問題であり、これは純粋に数論的な問題である。この問題は [1] において解かれており、ガロア逆問題における結果などが応用されている。

今回の成果は [2] にまとめられており、査読付きの論文誌に投稿中である。

(2) 代数体の整数環 $R$ に対して,  $R$ の $ax + b$ 型半群の半群  $C^*$ -環の KMS 状態を研究した. 特に, type I KMS 状態に付随する既約表現を決定し, Dedekind zeta 関数が「量子統計力学的な関数」の形で不変量として自然に現れることを明らかにした. その他, KMS 状態の明示的な公式や, それを用いて標準的な準同型によって KMS 状態がどのように写るかなど, 付随する様々なことを調べた. この成果に関しては論文執筆中であり, 進行中の部分もある.

<引用文献>

- [1] Gunther Cornelissen, Xin Li, Matilde Marcolli, and Harry Smit, Reconstructing global fields from dynamics in the abelianized Galois group, preprint, arXiv:1706.04517, 2017.  
[2] Y. Kubota and T. Takeishi, Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory, preprint, arXiv:1709.03281, 2017.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計1件)

T. Takeishi, Bost-Connes systems for local fields of characteristic zero, Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, no. 7, 2052-2069 (2018).

[学会発表](計4件)

Y. Kubota and T. Takeishi, Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory, 作用素論作用素環論研究集会 2018, 静岡, 2018年12月

T. Takeishi, Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory, 日本数学会 2018年度年会, 東京, 2018年3月

T. Takeishi, Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory, RIMS 共同研究「トポロジカル相についての数学的研究」, 京都, 2018年1月.

T. Takeishi, Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory, Facets of Irreversibility: Inverse Semigroups, Groupoids, and Operator Algebras, Oslo, Norway, 2017年12月.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.cis.kit.ac.jp/~takeishi/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。