

令和元年6月13日現在

機関番号：32606

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H07074

研究課題名(和文) 総実体上の保型形式に伴うGalois表現の特徴づけに関する研究

研究課題名(英文) Characterizations of Galois representations associated to Hilbert modular forms

研究代表者

吉川 祥 (Yoshikawa, Sho)

学習院大学・理学部・助教

研究者番号：10803736

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：総実体上の楕円曲線の保型性に関する研究を行った。これは、フェルマーの最終定理の証明の際に決定的な役割を果たした志村谷山予想の一般化に関するものである。
本研究の以前に得られていた結果は、楕円曲線の定義体が有理数体上アーベルなものに限られていた。本研究では、定義体が13または47を割るある素点において完全分解すると仮定すれば、アーベルという仮定を落としても多くの場合に楕円曲線の保型性が証明できることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

楕円曲線の保型性は、志村谷山予想の直接の一般化であり、数論において重要な予想であるラングランズプログラムやFontaine-Mazur予想の特殊な場合である。したがって、保型性が保証された楕円曲線の範囲を広げることにより、ラングランズプログラムやFontaine-Mazur予想のひとつの証左になりうる。また、楕円曲線にはL関数と呼ばれる重要な関数(楕円曲線の多くの情報を持った複素関数)が付随するが、楕円曲線の保型性を示すことで初めてL関数が良い解析的性質を持つことが保証されるという直接の利点もある。

研究成果の概要(英文)：This research is about modularity of elliptic curves over a totally real number field. This work generalizes the Shimura--Taniyama conjecture to the totally real case, which played the crucial role in the proof of the Fermat's last theorem.
The result we had before this research was on elliptic curves which are defined over certain "abelian" totally real fields. Because the assumption "abelian" is very strong, the main aim of this research was to weaken this assumption. It turned out during this research that, if we assume the field of definition splits at some primes dividing 13 or 47, we can prove modularity of many elliptic curves over the field without the abelian assumption.

研究分野：整数論

キーワード：楕円曲線 保型表現 モジュラー形式 ラングランズ対応 Galois表現

1. 研究開始当初の背景

ワイルズによるフェルマー予想の解決において、証明の大きな鍵は、志村谷山予想の(大部分の)解決であった。志村谷山予想とは、有理数体上の楕円曲線とモジュラー形式との間の対応を記述する予想である。その証明は、適切な局所条件を満たす2次元ガロワ表現と、保型形式に付随するガロワ表現とを結びつける代数的手法(R=T定理、保型性持ち上げ定理)の開発によるものだった。その後、p進ホッジ理論の発展と合わせて、およそ四半世紀の間に保型性持ち上げ定理の技術は目覚ましい発展を遂げた。その結果、より一般の局所条件とより高次元のガロワ表現に対して、その保型性を証明できるようになってきた。特に、2010年頃には、2次元のガロワ表現に対してはかなり多くの場合に保型性を示せるようになっていたように思われる。

しかし、この状況においても楕円曲線(に付随するガロワ表現)の中で保型性が分からないものも未だ数多く存在する。この困難は、保型性持ち上げ定理を適用する際の仮定として「剰余保型性」と呼ばれる条件を満たさなくてはならず、一般の楕円曲線ではこの仮定が満たされるかどうか不明であることに起因する。

楕円曲線の保型性に限った関連研究としては、研究開始当初においては、フライタス・ルハン・シクセクによるものがあった。彼らは、保型性持ち上げ定理やモジュラー曲線の有理点の議論を用いて、実2次体上定義された楕円曲線がすべて保型性を持つことを示していた。また、定義体を拡大することを許しつつ楕円曲線の保型性を示す「潜在的保型性定理」に関しては、研究開始当初の段階では、任意の総実代数体上の全ての楕円曲線について正しいことが示されていた。

2. 研究の目的

背景で述べたように、2次元ガロワ表現に対する保型性持ち上げ定理が十分に発展した今でも(アприオリには)保型性の分からない楕円曲線が数多く存在する。本研究では、このように保型性が未知である楕円曲線(に付随する2次元ガロワ表現)の保型性を示すことを目的としている。

まず、技術上の制約から、楕円曲線の定義体としては総実代数体を考える。また、本研究以前に研究代表者である吉川は、有理数体上アーベル拡大である総実代数体に対して、それを係数にもつ楕円曲線の保型性を示していた。したがって、本研究ではアーベルという仮定を弱めることを主目的としていた。

楕円曲線の保型性を示すことは、フォンテーニュ・メイザー予想の一部でもあり、更には現代の整数論における主要問題であるラングランズプログラムの特殊な場合を与える。こうした大きな予想・プログラムへの貢献も、本研究の目的の一つである。

3. 研究の方法

楕円曲線の保型性を示すためのアプローチとして以下の2つが考えられる。

一つめのアプローチは楕円曲線の性質・理論を利用することにより、保型性が未知である楕円曲線を、保型性が既知である楕円曲線に結び付け、保型性を伝播させることである。あるいは、楕円曲線の定義体に適切な条件をうまく課すことによって、そのような体上で定義された楕円曲線については保型性が未知であるという状況が起こりえないことを示す。(言い換えれば、どの楕円曲線についても既存の保型性持ち上げ定理が使える状況に帰着できるように、定義体に関するうまい条件を見付けるということである。)

もう一つのアプローチは、楕円曲線に付随するガロワ表現に関して剰余保型性と呼ばれる性質を新たな仮定のもとで示し、更に保型性持ち上げ定理そのものを改良することである。そして、これらを保型性が未知の楕円曲線に適用するというものである。

理論の発展という観点からは後者のアプローチを採ることが望ましいが、残念ながら、現状ではこれは極めて難しいように見える。特に、新たな剰余保型性を示すという部分である。本研究では(もちろん後者のアプローチの具体的方策も探りつつ)前者の手法により楕円曲線の保型性を示すという方針で研究を行った。ただし、前者のアプローチを採ることは必ずしも消極的な研究姿勢ではないことを強調したい。剰余保型性や保型性持ち上げ定理といった理論の一般論は、現在までかなりの程度が整備されている(だからこそそれを更に発展させることは難しい、と言える)。こうした一般論を楕円曲線という具体的な対象に応用する際に、長いあいだ研究されてきた楕円曲線(やモジュラー曲線)の性質や結果が絡み合い、一般論では導けないような強い結果を導ける見込みがあるためである。

4. 研究成果

本研究の以前に得られていた結果は、楕円曲線の定義体が有理数体上アーベルなものに限られていた。より正確には、3, 5, 7で不分岐なアーベルという条件を課していた理由は、与えられた楕円曲線の3, 5, 7等分点のなす剰余ガロワ表現が同時に可約である場合に、スキ

ナー・ワイルズによる剰余可約表現に対する保型性持ち上げ定理を用いる必要があったためである。

本研究は、楕円曲線の3, 5, 7等分点が同時に可約となる状況は起こりにくいのではないかという直感に基づく。そこで、楕円曲線の3, 5, 7等分点の少なくとも一つが既約となるような、定義体に関する条件を模索した。

その結果、以下のような結果が得られた：13または47を割るある素点 v において定義体が完全分解すると仮定すれば、有理数体上アーベル拡大という仮定を課さなくても、その体上で定義された楕円曲線の保型性が多くの場合に証明できることが分かった。(多くの場合というのは、正確には、「 v で潜在的に良還元を持つ楕円曲線に対して」という意味である。)

また、考える楕円曲線を全ての素点で準安定還元を持つようなものに限れば、上記の13や47に関する仮定をそれ以外の素数(11, 23, 59, 83)に変えた結果も成り立つことを証明することが出来た。

更に、 v で潜在的に良還元を持たない場合でも、モジュラー曲線 $X_0(15)$ や $X_0(21)$ の有理点を調べることによって肯定的な結果が得られるのではないかという見通しが立った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 1 件)

吉川祥、「ある総実体上の楕円曲線の保型性について」、早稲田整数論セミナー、2018年12月

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。