

令和元年6月5日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H07131

研究課題名(和文) 一般化された走化性方程式系の解構造の解明

研究課題名(英文) Investigations on solution structures of generalized chemotaxis systems

研究代表者

藤江 健太郎 (Fujie, Kentaro)

東京理科大学・理学部第一部数学科・助教

研究者番号：50805398

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では走化性による粘菌の挙動を記述する走化性方程式系の一般化問題を研究対象とし、その解の挙動に関する研究を行った。一般の感応性関数をもつ走化性方程式系の解の挙動を感応性関数の減衰具合によって分類した。技術面においては、走化性方程式系を単独方程式の摂動として見て、摂動による誤差の評価を行うという新しい視点を導入した。また、走化性方程式系のもつ数理構造に注目して、構造的視点から一般化・高次元化となる方程式系の解の挙動について研究した。特に、空間4次元において質量臨界現象が起こることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の対象である走化性方程式系は、がん浸潤現象をはじめとする多くの生物現象を記述する数理モデルの基礎方程式である。そのため、走化性方程式系の解の挙動に関する研究は、走化性による粘菌の挙動(集中現象など)を解明する数学的解析としての意義がある。学術的には、複数の偏微分方程式による連立系には従来の多くの研究手法が使えず、国際的に研究活動が活発である。本研究では、連立系を単独方程式の摂動として扱うという新手法を開発し、また問題の持つ構造に視点を移して解の挙動を研究した。

研究成果の概要(英文)：In this research I consider behaviors of solutions to generalized problems of the chemotaxis system, which describes a movement of cells induced by chemotaxis. I classified behaviors of solutions to the chemotaxis system with generalized sensitivity functions by decaying rates of sensitivity functions. Technically, we introduced a new viewpoint of regarding the chemotaxis system as a perturbation of a single equation and estimating perturbation errors. Moreover, we focused on mathematical structures of chemotaxis systems and study behaviors of solutions to some system, which is a generalization of chemotaxis systems from a structural viewpoint. Especially, we showed that a mass critical phenomenon occurs in the four-dimensional setting.

研究分野：大域解析学

キーワード：走化性方程式 Keller-Segel系 放物型方程式 関数方程式 爆発現象

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

走化性方程式系は偏微分方程式の連立系であり、従来の単独方程式に対する研究手法が使えないことが多く、国内外で活発に研究されている。

(1) 感応性関数をもつ走化性方程式系については、定常問題に関する研究は国内外で広くされているが、時間発展する場合については解の挙動の研究は進んでいなかった。感応性関数の導入により、走化性方程式系のもつ変分構造や virial identity が崩れてしまうため、従来の研究手法が適用できない。研究代表者の先行研究によって、時定数の大きさ・空間次元を制限した場合において部分的な結果が与えられており、時定数の大きさを変えた場合・高次元の場合は未知であった。

(2) 走化性方程式系の数理構造的視点による高次元化問題は、研究代表者の先行研究 Fujie-Senba (JDE 2017) によって導入されたがん浸潤現象を記述する数理モデルの単純化として導入され、この新しい方程式系の変分構造及び解構造は部分的に明らかとなっていた。この結果を踏まえると新しい方程式系の解構造は走化性方程式系の解構造の高次元化となることが予想されていた。

2. 研究の目的

(1) 一般の感応性関数をもつ走化性方程式系の解の挙動を感応性関数の性質によって分類する。すなわち、感応性関数に対してどのような条件を課せば走化性方程式系の解が時間大域的に存在するのか、また有限時刻爆発解が存在するのかを明らかにする。特に、モデリングから要請される典型例である対数型の感応性関数の場合の臨界条件を導出する。

(2) 研究対象とする新しい方程式系の解が空間次元・初期値の大小によってどのような挙動をするのかを分類し、走化性方程式系との比較を行う。これによって、研究対象とする連立系の解構造がもとの走化性方程式系の解構造の高次元化となることを明らかにする。特に、質量臨界現象を確認し、その際の臨界指数を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 形式的に時定数を極限移行すると、走化性方程式系は非局所非線形熱方程式となる。この観察に基づいて、非線形熱方程式の摂動とみて走化性方程式系の全域可解性を導くという手法を採用した。摂動による誤差を表す項が放物型方程式の解となることを示し、この方程式の解の減衰評価を利用した。また、解の評価の際に摂動を表すパラメータである時定数の大きさへの依存度を観察した。

(2) 研究代表者の先行研究 (Fujie-Senba JDE 2016) で構成した変分構造に注目する。定常問題である 4 階の楕円型方程式の解の量子化を示し、これと変分構造を組み合わせることで爆発解を構成するという方法 (Horstmann 2001) を一般化問題へ適用した。

4. 研究成果

(1) 一般の感応性関数をもつ走化性方程式系の解の挙動の解析。移流項を持つ第一方程式の時定数が小さいという設定で、一般の感応性関数をもつ放物・放物型走化性方程式系の解の挙動を解析した (雑誌論文 6)。感応性関数に対して自然に臨界と考えられる条件のもとで全域可解性を示した。時定数の大きい場合については研究代表者の先行研究があり、これに対応する未解決であった部分である。また、空間 3 次元以上の場合で臨界と思われる条件を導出した研究は初めてである。

また、本研究で開発した放物型方程式の連立系である走化性方程式系を単独の非線形熱方程式の摂動と見て解の評価を行う手法が、repulsion 型の走化性方程式系に対しても適用可能であることを確認した。

(2) 走化性方程式系の持つ数理構造の一般化。空間 4 次元で初期値が大きい場合に、二種の化学物質を持つ走化性方程式系の解が爆発することを示した (雑誌論文 5)。この研究によって、走化性方程式系の変分構造は高次元に一般化できることが明らかになった。また、質量臨界現象の際の臨界定数を明らかにした。

高次元における有限時刻爆発解の構成については、エネルギー評価の際に第二未知関数の時間導関数の評価が鍵となることを確認した。二種走化性方程式と元の走化性方程式の関係に着目し、構造的に両者の補間である attraction-repulsion 型の走化性方程式の解構造を調べた (雑誌論文 4)。また、ロジスティック効果がついた二種走化性方程式の解構造も調べた (雑誌論文 2)。間接的な拡散の効果により通常の走化性方程式の解と違って、より解が安定的になることを明らかにした。

(3) 上記(2)の研究において変分構造の一般化を考察するにあたって、空間 1 次元の走化性方程式系がある種の崩れたエネルギー構造を持つことを発見した。この新たな数理構造を利用することで、空間 1 次元において自然に臨界と思われる準線形走化性方程式系の解が時間大域的に

存在することを示した(雑誌論文⁷)。さらに、このエネルギー構造が従来のリアプノフ汎関数の2階導関数として扱えることが分かった。この考察に基づいて通常のリアプノフ汎関数の評価と組み合わせることで、時間に一様な解の有界性を導出することが出来、臨界現象の非存在性を明らかにした(雑誌論文³)。また、放物・楕円型1次元臨界走化性方程式系の時間大域可解性と有界性についても明らかにした(雑誌論文¹)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 7 件)

1 T. Cieslak, K. Fujie, Global existence in the 1D quasilinear parabolic-elliptic chemotaxis system with critical nonlinearity, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 13, (2020) 165-176, 査読あり doi: 10.3934/dcdss.2020009

2 K. Fujie, Global asymptotic stability in a chemotaxis-growth model for tumor invasion, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 13, (2020) 203-209, 査読あり doi: 10.3934/dcdss.2020011

3 B. Bieganowski, T. Cieslak, K. Fujie, T. Senba, Boundedness of solutions to the critical fully parabolic quasilinear one-dimensional Keller-Segel system, *Math. Nachr.*, 掲載決定済 査読あり doi: 10.1002/mana.201800175

4 K. Fujie, T. Suzuki, Global existence and boundedness in a fully parabolic 2D attraction-repulsion system: chemotaxis-dominant case, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 28 (2019), 掲載決定済 査読あり <http://mcm-www.jwu.ac.jp/~aikit/AMSA/index.html>

5 K. Fujie, T. Senba, Blowup of solutions to a two-chemical substances chemotaxis system in the critical dimension, *J. Differential Equations*, 266 (2019), 942-976, 査読あり <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.07.068>

6 K. Fujie, T. Senba, A sufficient condition of sensitivity functions for boundedness of solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis system, *Nonlinearity*, 31 (2018), 1639-1672, 査読あり <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aaa2df>

7 T. Cieslak, K. Fujie, No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear fully parabolic chemotaxis system, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146 (2018), 2529-2540, 査読あり <https://doi.org/10.1090/proc/13939>

〔学会発表〕(計 13 件)

1 藤江健太郎, 感応性関数をもつ走化性方程式について, 第13回室蘭工業大学応用解析セミナー, 2019年3月

2 K. Fujie, No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear fully parabolic chemotaxis system, *Seminarium Zakladu Rownan Fizyki Matematycznej, MIMUW (ポーランド)*, 2018年11月.

3 藤江健太郎, 1次元準線形 Keller-Segel 系の臨界現象の非存在性, 応用数学セミナー, 東北大学, 2018年7月.

4 K. Fujie, New Lyapunov-like functional of 1D quasilinear Keller-Segel system and its application, *The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, National Taiwan University (台湾)*, 2018年7月.

5 K. Fujie, Global existence and boundedness in a fully parabolic two-chemical substances chemotaxis system, *8th Euro-Japanese Workshop on Blow-up*, 東北大学, 2018年7月.

6 K. Fujie, On an attraction-repulsion chemotaxis system, *The 3rd International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis*, 東京理科大学, 2018年2月.

7 K. Fujie, A higher dimensional generalization of the Keller-Segel system, Mathematical aspects of chemotaxis, cross-diffusion effects and concentration phenomena, Banach Center (ポーランド), 2018年2月.

8 K. Fujie, No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear fully parabolic Keller--Segel system, 第35回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学 西新プラザ, 2018年1月.

9 藤江健太郎, B. Bieganowski, T. Cieslak, 1次元準線形 Keller--Segel 系の Lyapunov-like 汎関数とその応用, 第43回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2017年12月.

10 藤江健太郎, No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear fully parabolic Keller--Segel system, 第7回室蘭非線形解析研究会, 室蘭工業大学, 2017年12月.

11 K. Fujie, Global existence in a fully parabolic chemotaxis system with general sensitivity, PDE seminar, Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences (ポーランド), 2017年11月

12 藤江健太郎, T. Cieslak, No critical nonlinear diffusion in 1D quasilinear Keller--Segel system, 日本数学会2017年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会, 山形大学, 2017年9月.

13 K. Fujie, A generalization of the Keller--Segel system to higher dimensions from a structural viewpoint, Equadiff 2017 (Invited minisymposia), Slovak University of Technology (スロバキア), 2017年7月.

[その他]

ホームページ

<https://researchmap.jp/kfujie/>

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2)研究協力者

1

研究協力者氏名: 仙葉隆

ローマ字氏名: Takasi Senba

2

研究協力者氏名: Tomasz Cieslak

ローマ字氏名: Tomasz Cieslak

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。