

令和元年6月10日現在

機関番号：12614

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H07302

研究課題名（和文）新しい消散構造をもつ非線形偏微分方程式の統一的な安定性解析理論

研究課題名（英文）Stability theory for the nonlinear partial differential equations with new dissipative structures

研究代表者

森 直文（Mori, Naofumi）

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：10803413

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：Timoshenko 系に対して Cattaneo 型の熱力学的消散効果や記憶型消散効果を導入し、消散構造の特徴付けと最良減衰評価を構築した。さらに、対応する非線形問題も考察し、時間大域解の一意存在を示した。これらは、いずれも小さい初期値に対して物理的に意味のある必要最小限度のなめらかさのみを仮定して示すことに成功している。

また、これらの結果を一般化し、安定性条件として最も適用できる具体例の多い構造条件を考案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

新しい消散構造をもつ数理モデルの具体例には、身近で生活との関わりが深いものも多く含まれる。それにもかかわらず、これらのモデルに対しては統一的な解析方法が確立されておらず、しかも消散効果が脆弱なため、数学的に厳密に議論するのが難しいという問題点がある。

今回得られた研究成果は、今後、これらの数理モデルの統一的な解析方法の確立に向けた研究において必要不可欠の結果になると考えている。

研究成果の概要（英文）：The Timoshenko system was considered by introducing Cattaneo's type heat conduction or memory, respectively. Consequently, their dissipative structures were well characterized and optimal decay estimates were shown. Besides, the global existence and uniqueness were obtained. Note that all of the results were proved under the minimal regularity assumption only on the small initial data.

Also, by generalized above results, the new stability condition was established, which could be applicable to more examples than any other condition.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形偏微分方程式 消散構造 安定性解析

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

■ 研究開始当初の背景：

気体力学、流体力学、弾性体力学等に現れる非線形偏微分方程式系には、物理的に自然な形で消散構造を伴うものが多い。この消散構造に着目し、方程式の構造条件からエネルギー減衰特性までを明らかにしたものが「静田・川島条件」(参考文献 [2]) である。しかし近年、この一般論の枠組みに収まらない、非常に弱い消散構造をもつ例が発見された。これらの消散構造は従来のものと異なり、特に高周波域で固有値の実部が 0 に収束する。そのためエネルギー減衰構造が脆弱であり、定量的な減衰評価においては可微分性の損失が避けられない。この特徴が具体例の数学解析を困難にし、一般的な解析手法は世界的な関心の高さにも関わらず未だ確立されていない。

■ 着想に至った経緯：

これに対して報告者は、具体的に、材料工学に現れる線形 Timoshenko 系に様々な消散機構を導入し、その消散構造を調べた。その結果、可微分性損失型消散構造を完全に決定し、さらに対応する最良の減衰評価を与えることに成功した。特に Timoshenko-Fourier 系と Timoshenko-Cattaneo 系の消散構造と減衰評価に関する結果は、可微分性損失型消散・減衰構造の複雑さ・多様性と、その完全な特徴付けの難しさを知らしめる重要な成果となった。そしてその結果を非線形系に応用し、局所解の存在に必要な仮定だけを初期値に課して、時間大域解の存在と最良の減衰評価を証明した。電子工学に現れる非線形 Euler-Maxwell 系に対しても、類似の結果を証明している。この最良減衰評価の成果は、報告者らが導出した $L^p-L^q-L^r$ 型評価式を用いなければ得られない。この評価式は、先行研究の可微分性損失型の減衰評価(参考文献 [1]) を一般化したものである。

参考文献

1. K. Ide, K. Haramoto and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **18** (2008), 647-667.
2. Y. Shizuta and S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, *Hokkaido Math. J.*, **14** (1985), 249-275.

2. 研究の目的

■ 研究の全体構想

本研究は、非線形偏微分方程式系の消散構造に着目して、その解析から対応する最良のエネルギー減衰構造を決定するとともに、そこに現れる非線形波動や振動の安定性問題を解決することが目的である。近年、消散構造の一般論に乗らない、極めて脆弱な消散構造をもつ例が発見され、注目を集めている。その新しい消散構造をもつ例のエネルギー減衰構造を明らかにし、消散構造の弱さに起因する解析的困難を克服する新手法を開発することで、非線形安定性解析における新理論の構築を目指す。

■ 本研究の具体的な目的

- 1) 一般論が適用できない消散構造をもつ具体例のエネルギー減衰構造を決定する。
- 2) その非線形安定性問題に対応するために、Lyapunov 関数の改良や減衰評価の精密化を目指す。
- 3) 以上の成果をもとに、新しい消散構造をもつ具体例も含めた一般の緩和的対称系に対して、そのエネルギー減衰構造を決定付ける構造条件の一般化を行う。

■ 研究期間内に何をどこまで明らかにしようとするのか

- 1) 記憶型消散項を含む緩和的雙曲型方程式系の消散構造：
報告者らは、記憶型消散項を導入すると方程式系の型によって消散構造が変わり、可微分性損失型の消散構造が現れることがあることをつきとめた。このように、可微分性損失型の消散構造をもつ様々な具体例を考察し、そのエネルギー減衰構造を明らかにする。
- 2) 非線形 Timoshenko-Cattaneo 系の安定性解析：
未解決である、非線形 Timoshenko-Cattaneo 系の時間大域解の存在と最良減衰評価を、局所解の存在に必要な仮定だけを初期値に課して証明する。さらに、従来の消散項の導入の仕方や非線形性の仮定を物理的側面から再検証し、その安定性評価に必要な新手法の開発を行う。
- 3) 緩和的雙曲型および雙曲・放物型方程式系の安定性解析：

上記の研究成果を一般の方程式系に応用し、様々な非線形偏微分方程式系のエネルギー減衰と非線形安定性を統一的に解析する新理論を構築する。特に研究期間内は、上記の方程式系を具体例として含む双曲型および双曲・放物型方程式系を考察する。

3. 研究の方法

本研究では、従来の一般論である「静田・川島条件」が適用できない可微分性損失型の消散構造をもつ非線形偏微分方程式のエネルギー減衰構造を明らかにし、それらの具体例を含めて、エネルギー減衰と非線形安定性を統一的に解析できる新しい一般論の完成までを目標とする。

(1) 記憶型消散項を含む緩和的双曲型方程式系の消散構造

可微分性損失型消散構造をもつ具体例を考察し、そのエネルギー減衰構造を明らかにする。記憶型消散効果を導入すると方程式系の型によって消散構造が変わることをスペクトル解析により完全な特徴付けを行う。ただし、記憶型消散効果は消散性が非常に弱いいため、期待より減衰の遅い評価しか得られない可能性がある。その場合は、従来の評価方法の一般化と、記憶核に対する仮定の合理化で解決を試みる。

(2) 非線形 Timoshenko-Cattaneo 系の安定性解析

最も消散性が弱く、先行結果がないモデルの非線形安定性を、局所解に近い滑らかさで証明する。前段階として力学的&熱力学的両方の消散効果を導入した非線形 Timoshenko 系を考察して、その最良減衰評価を局所解と同じクラスで示すことに成功した(参考文献 [4])。これに応用して、熱効果のみを考慮した非線形系の安定性を示す。ただし、非線形項を通常のエネルギー法で評価できない可能性がある。その場合は、時間重み付きエネルギー法と L^p-L^q-L' 型時間減衰評価とを組み合わせることで、非線形項の弱い消散性をコントロールする。これにより、局所解にできるだけ近い滑らかさで、時間大域解を構成できる。

(3) 非線形 Timoshenko-Cattaneo 系の安定性解析 (つづき)

更に、発展的研究として、工学への広範な応用が見込める一般化モデルを構築し、その非線形安定性を従来モデルと同様に証明できるか、検証する。従来モデルは非線形性を曲げモーメントに対してのみ導入しているので、熱効果に対しても非線形性を課してモデル化を行う。これにより、一般の熱力学的法則をみたすモデルを構築できる。ただし、新モデルを構築できても、安定性評価が難しく、有効な新手法も開発できない可能性がある。その場合は、工学的な応用範囲を広げるもう一つの研究の選択肢として外部領域において消散構造を調べてみたい。このとき、局所減衰理論を構築するところが鍵となるが、これは報告者が精通する全空間での理論のコンパクト摂動として構築できる。

(4) 緩和的双曲型および双曲・放物型方程式系の安定性解析

従来の消散構造に対する一般論「静田・川島条件」の理論を、新型の可微分性損失型消散構造をもつ具体例をすべて含むように拡張し、新理論を完成させる。そのため、国内外の研究集会に多く参加し、特に具体例の調査と情報収集が必要である。近年、大きな注目を得ながら未だ新しい一般論ができない理由は可微分性損失型消散・減衰構造の複雑さ・多様性にある。構造条件の予測が困難ならば、報告者らが具体例で開発した Lyapunov 関数 ([3]) の構成法を行列を用いて一般化することで、必要な構造条件を明らかにする。

参考文献

3. N.Mori, S.Kawashima, Decay property of the Timoshenko-Cattaneo system, *ANALYSIS AND APPLICATIONS*, **14**(3) (2016), 393-413
4. N.Mori, R.Racke, Global well-posedness and polynomial decay for a nonlinear Timoshenko-Cattaneo system under minimal Sobolev regularity, *Nonlinear Analysis*, **173** (2018), 164-179

4. 研究成果

本研究では流体力学や弾性体力学などに現れる非線形偏微分方程式系が共通して持つ「消散構造」に着目し、その特徴に基づいた最良のエネルギー減衰構造を決定し、関連する非線形波動や振動の安定性問題について有効な解析手法の整備と、統一的な安定性解析の一般論の構築を目指して研究を行なった。特に、これらの多くが属する緩和的双曲型保存則系に対する安定性解析の従来の一般論に乗らない、剪断変形を考慮した梁の振動を表現する Timoshenko 系など、各物理量が複雑に影響を及ぼし合う方程式系のエネルギー評価などに現れる「可微分性の損失」と呼ばれる新しい現象の解明と起因する困難の解決に取り組んで、以下の結果を得た：

■ 平成 29 年度

1. 消散的 Timoshenko 系に Cattaneo 型の熱力学的消散効果を導入した非線形版のモデルの初期値問題を全空間で考察し、時間大域解の存在と最良の減衰率を持つ減衰評価を、小さい初期値に対してそれぞれ物理的に意味付け可能な最小限のなめらかさのみを仮定して示すことに成功した。
2. 安定性解析の一般論で重要な職人技条件を、可微分性の損失を誘発する新しい消散構造をもつ狭義消散的な方程式系すべてに適用できるように一般化し、方程式の各物理量が複雑に及ぼし合う影響と、エネルギー減衰特性の関係を完全に解明した。

■ 平成 30 年度

1. 記憶型の拡散効果を含む線形対称双曲型方程式の初期値問題を全空間で考察し、従来的一般論と同様の時間減衰率を持つ評価を得ることができた。とくに記憶項については、通常より一般的に拡張した仮定を施しており、これを扱う上で必要な解析手法の整備を行った。
2. 梁の振動を表す Timoshenko 系に力学的消散効果を一切課さず、Cattaneo 型の熱力学的消散効果のみを導入した非線形版のモデルの初期値問題を全空間で考察し、時間大域解の存在を、小さい初期値に対して物理的に意味付け可能な最小限のなめらかさのみを仮定して示すことに成功した。力学的消散効果を課した場合との比較が興味深い点である。さらに特筆すべき点として、Fourier 型の熱力学的消散効果を導入した場合は方程式のタイプが双曲型方程式から双曲・放物型方程式に変わるが、解に相当する関数の作り方を工夫することで、同時に同じ結論が導けることを示した。

5. 主な発表論文等

1. N.Mori, An S & K mixed condition for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxations, (2019) DOI: 10.1007/s40879-019-00331-w
2. N.Mori, R.Racke, Global well-posedness and polynomial decay for a nonlinear Timoshenko-Cattaneo system under minimal Sobolev regularity. *Nonlinear Anal.*, 173 (2018), 164-179
3. N.Mori, Dissipative structure and global existence in critical space for Timoshenko system of memory type, *J. Differential Equations*, 265 (2018), no. 4, 1627-1653

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 1 件)

1. N. Mori, The S & K mixed condition for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxations, 日本数学会 2018 年度年会, 2018 年 3 月

他, 国際研究集会における招待講演 2 件, 国内セミナーにおける招待講演 1 件

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年：
 国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：

番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：川島秀一

ローマ字氏名：Kawashima Shuichi

研究協力者氏名：Reinhard Racke

ローマ字氏名：Reinhard Racke

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。