

令和 3 年 5 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K00029

研究課題名（和文）離散最適化における新しい離散凸性の開拓とそれに基づく高性能アルゴリズム開発

研究課題名（英文）Exploring novel discrete convexity in discrete optimization and designing high performance algorithms based on it

研究代表者

平井 広志（Hirai, Hiroshi）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・准教授

研究者番号：20378962

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、離散最適化において有用な新しいタイプの離散凸性の開拓とそれに基づくアルゴリズム開発を行った。非可換変数を含む行列のDieudonne行列式の次数計算という問題を導入し、それが、基本的な組合せ最適化問題の一般化とみなせること、そして、ユークリッド的ビルディング上での離散凸関数最小化として効率的に計算されることを示した。一様セミモジュラ束という新しいクラスの束を導入し、それが離散凸関数の重要なクラスである付値マトロイドに同値となることを示した。離散凸関数の土台空間として期待される弱モジュラグラフと呼ばれるグラフクラスに対して系統的な研究を行い、非正曲率空間の関連を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでは整数格子のつえでの最適化のための離散凸性として研究されてきたことを、本研究課題では、より一般的なグラフや多面体を貼り合わせた空間上の最適化のための離散凸性へ拡張すること目標としている。そのような視点が有効となる問題が理論計算機科学の最先端においてじょじょに現れてきている。実際、本研究でも扱った非可換ランクの概念は、不変式論、量子情報、幾何学的計算量理論など広い分野にまたがる応用が見出されつつある。本課題の成果がそうした問題を扱う際の礎となることが期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we explored new types of discrete convexity, which will be useful for discrete optimization, and designed algorithms based on it. We introduced the problem of computing the Dieudonne determinant of a matrix having noncommutative variables, and showed that it generalizes fundamental combinatorial optimization problems and can be efficiently solved by discrete convex optimization on a Euclidean building. We introduced a new class of lattices, called uniform semimodular lattices, and showed that it is equivalent to valuated matroids, which is an important class of discrete convex functions. We studied systematically a class of graphs, called weakly modular graphs, which is expected as ground structures of discrete convex functions, and clarified its relationships to nonpositively curved spaces.

研究分野：離散最適化

キーワード：離散凸解析 劣モジュラ最適化 多項式時間アルゴリズム 代数的アルゴリズム CAT(0)空間

1. 研究開始当初の背景

離散最適化とは、巨大な有限の組合せの中から最も好ましいものを現実的な時間内で選び出すアルゴリズムの設計を目指す理論体系であり、60年代半ばの Jack Edmonds の一連の研究により始まった。Edmonds は、効率的アルゴリズム設計における多面的方法やマトロイド・劣モジュラ関数の有効性を示し、それらは、70年代の NP 完全性の理論、80年代の Grotschel-Lovasz-Schrijver 理論を経て整備され、90年代から 2000年代にかけて、室田一雄らによって、ネットワークフロー・マトロイド・劣モジュラ関数に関連する離散最適化問題を統一的に扱う「整数格子上の凸関数の理論」---離散凸解析---として結実した。

私は、これまでの研究課題で多品種フローや施設配置問題といった上述の流れとは異なる離散最適化問題に取り組んできたが、そこには、上述の離散凸関数の理論では扱いきれないが、それでも類似の興味深い構造があることがあることを見出した。具体的にいうと、問題をあえて、グラフや複体といった非ユークリッド的、非多様体的な空間上の最適化問題に、定式化・緩和すると、新しいタイプの離散凸関数が現れ、離散凸解析のフィロソフィーやアナロジーが応用できることがあるのである。実際、私はそのアプローチによって、多品種フローや施設配置問題に対して、いくつかの未解決問題を解決してきた。

2. 研究の目的

本研究課題では、それらをうけて、マトロイド・劣モジュラ性を超える「離散最適化における新しい離散凸性」のさらなる開拓と、それに基づく、多品種フロー、施設配置問題、ネットワークデザイン問題を含む種々の離散最適化問題の計算複雑度の解明と多項式時間可解な問題クラスの拡充、そして、高性能な多項式時間アルゴリズム・近似アルゴリズム・FPT アルゴリズム・ヒューリスティクスの開発を目指すものである。具体的な目標としては、新しい L 凸関数の降下アルゴリズムの解析とそれに基づく多品種フローに対する組合せ的強多項式時間アルゴリズムを開発や、k-劣モジュラ関数などの新しい劣モジュラ関数の表現法・計算複雑度の解明、それらに基づく NP 困難問題に対する近似アルゴリズム・FPT アルゴリズム設計への応用、さらにベクトル部分空間な空間や CAT(0)空間上の最適化問題のような新しい離散最適化問題への挑戦がある。

3. 研究の方法

本研究課題は以下の4つのフェーズから構成される。1つ目は、離散凸関数そのものを対象とする研究、2つ目は、離散凸関数の土台となる離散構造を対象とする研究、3つ目は、アルゴリズム構築の一般的フレームワークの構築、4つ目は、個々の具体的な問題への適用、である。これらは互いに相補的でフィードバックし合う関係にあり、それぞれ異なる知識・アイデアが要求される。それに対し世界中に散らばる異なる分野の専門家たちとの交流を通じて取り組んでいく。そして、国内・国際会議/ワークショップ等に参加・発表し、本研究課題の成果やフィロソフィーを世界に発信し、仲間を増やし、研究を推進していく。

4. 研究成果

新しい離散凸性に基づくアルゴリズムに関する成果としては、以下が得られた：

- ・点容量型最大多品種流問題と点マルチカット問題に対して、グラフ上の離散凸解析の考え方をを用いることで、それぞれ、組合せ的強多項式時間アルゴリズムと組合せ的2近似アルゴリズムが得られていたが、それらをまとめた投稿中論文「A dual descent algorithm for node-capacitated multiflow problem and its applications」の改訂作業を行い、ACM Transactions on Algorithms から出版された。

- ・制約付き充足問題 (CSP) の最適化バージョンである値付き制約付き充足問題 (VCSP) に対して、M 凸性を応用して新しい多項式時間化可解なクラスを導入して、その判定問題に対する多項式時間アルゴリズムを与えた。この成果をまとめた論文「A tractable class of binary VCSPs via M-convex intersection」(岩政勇仁, 室田一雄, Stanislav Zivny との共著) が ACM Transactions on Algorithms から出版された。

- ・その結果を系統樹推定問題に応用し、論文「Reconstructing phylogenetic tree from multipartite quartet system」(岩政勇仁との共著) にまとめた。この成果は、国際会議 ISSAC にアクセプトされ、講演を行った。

- ・CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について解説した「CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について」が電子情報通信学会誌に採録された。また、上記のテーマについて、いくつかの招待講演を行った。

新しい離散凸性の構造論に関する成果としては、以下が得られた：

- ・一様セミモジュラ束という新しいクラスの束を導入し、それが、離散凸関数の重要なクラスである付値マトロイドと同値であることを示した。この成果をまとめた論文「Uniform semimodular lattices and valuated matroids」が Journal of Combinatorial Theory, Series A から出版された。

- ・離散凸関数の土台空間として期待される弱モジュラグラフと呼ばれるグラフクラスの系統的な研究を行い、非正曲率空間の関連を明らかにした論文「Weakly modular graphs and nonpositive curvature」(Victor Chepoi, Jeremie Chalopin, Damian Osajda との共著)が Memoirs of AMS から出版された。

行列のランクや行列式の次数計算に関わる最適化問題---代数的組合せ最適化問題---は、基本的な組合せ最適化問題の一般化であり、新しい離散凸性が現れ、本課題の重要なターゲットである。それらに関する成果としては、以下が得られた：

- ・混合行列の CCF を一般化した、ランクが 1 のブロックからなる分割行列の DM 分解を計算する多項式時間アルゴリズムを与えた。この成果をまとめた論文「Computing DM-decomposition of a partitioned matrix with rank-1 blocks」が Linear Algebra and Its Applications から出版された。

- ・本課題で考察していたベクトル部分空間がなす束上での劣モジュラ最適化が「非可換ランク」というランク概念の非可換バージョンの計算に応用できることがわかった。非可換ランクに関する最近の重要な発展について、組合せ最適化セミナーで「代数的組合せ最適化」と題して招待講演を行った。

- ・非可換ランクを拡張した Dieudonne 行列式の次数の計算する問題を導入し、それを、A 型ユークリッドビルディング上の L 凸関数の最小化問題となることを示し、最急降下法によるアルゴリズムを設計した。この成果をまとめた論文「Computing degree of determinant via discrete convex optimization on Euclidean building」が、SIAM Journal on Applied Geometry and Algebra から出版された。また、この成果に関して、マックスプランク研究所の研究集会「Buildings, Varieties and Applications」で招待講演を行った。

- ・最大 2 部マッチング問題を代数的に一般化した 2×2 型分割行列のランク計算に対する組合せ的な多項式時間アルゴリズムの開発に成功した(岩政勇仁氏との共同研究)。この結果は、国際会議 IPCO にアクセプトされ、講演を行った。

- ・パフィアンから符号を除いて定義されるハフニアンを固定された k に対し modulo 2^k で計算する多項式時間アルゴリズムを開発し、これを用いてあるクラスの最短長点素パス問題に対し多項式時間アルゴリズムを与えた。この結果をまとめた論文「Shortest $(A+B)$ -path packing via hafnian」(難波博之との共著)が Algorithmica から出版された。

- ・Z 変換と数値積分に基づく多面体内の整数格子を数え上げる新しいアルゴリズムを提案した。この成果をまとめた論文「Counting integral points in polytopes via numerical analysis of contour integration」(田中健一郎, 大城隆之介との共著)が Mathematics of Operations Research から出版された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hirai Hiroshi, Iwamasa Yuni	4. 巻 12125
2. 論文標題 A Combinatorial Algorithm for Computing the Rank of a Generic Partitioned Matrix with 2×2 Submatrices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Integer Programming and Combinatorial Optimization. IPCO 2020, Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 196 ~ 208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-45771-6_16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirai Hiroshi, Iwamasa Yuni, Murota Kazuo, Zivny Stanislav	4. 巻 15
2. 論文標題 A Tractable Class of Binary VCSPs via M-Convex Intersection	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ACM Transactions on Algorithms	6. 最初と最後の頁 1 ~ 41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3329862	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hirai Hiroshi	4. 巻 3
2. 論文標題 Computing the Degree of Determinants via Discrete Convex Optimization on Euclidean Buildings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry	6. 最初と最後の頁 523 ~ 557
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/18M1190823	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirai Hiroshi, Oshiro Ryunosuke, Tanaka Ken'ichiro	4. 巻 45
2. 論文標題 Counting Integral Points in Polytopes via Numerical Analysis of Contour Integration	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Operations Research	6. 最初と最後の頁 455 ~ 464
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1287/moor.2019.0997	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Hirai	4. 巻 15
2. 論文標題 A Dual Descent Algorithm for Node-capacitated Multiflow Problems and Its Applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 ACM Transactions on Algorithms	6. 最初と最後の頁 1 ~ 24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3291531	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Hirai	4. 巻 165
2. 論文標題 Uniform semimodular lattices and valuated matroids	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 325 ~ 359
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2019.02.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Hirai and Yuni Iwamasa	4. 巻 123
2. 論文標題 Reconstructing Phylogenetic Tree From Multipartite Quartet System	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018)	6. 最初と最後の頁 57:1--57:13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.ISAAC.2018.57	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Hirai	4. 巻 547
2. 論文標題 Computing DM-decomposition of a partitioned matrix with rank-1 blocks	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Linear Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 105 ~ 123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.02.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Hirai and Hiroyuki Namba	4. 巻 80
2. 論文標題 Shortest A+B-path packing via hafnian	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algorithmica	6. 最初と最後の頁 2678-2491
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00453-017-0334-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chalopin Jeremie, Chepoi Victor, Hirai Hiroshi, Osajda Damian	4. 巻 268
2. 論文標題 Weakly Modular Graphs and Nonpositive Curvature	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 平井広志	4. 巻 101
2. 論文標題 CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 電子情報通信学会誌	6. 最初と最後の頁 276 ~ 279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Yuni Iwamasa
2. 発表標題 A Combinatorial Algorithm for Computing the Rank of a Generic Partitioned Matrix with 2x2 Submatrices
3. 学会等名 International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2020) (国際学会)
4. 発表年 2020年 ~ 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Hirai
2. 発表標題 A nonpositive curvature property of modular semilattices
3. 学会等名 11th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 代数的組合せ最適化 --- Edmonds問題の最近の発展について ---
3. 学会等名 RIMS総合研究「組合せ最適化セミナー」(招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 非正な曲率をもつ束と半束のクラスについて
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 Algorithmic and combinatorial aspects of CAT(0) spaces
3. 学会等名 日本OR学会「超スマート社会のシステムデザインのための理論と応用」研究部会 第4回研究会(招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 離散凸解析と最適化
3. 学会等名 数理解析特別講義1 離散数学 (集中講義) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系 (招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Hiroshi Hirai
2. 発表標題 Uniform semimodular lattice, valuated matroid, and Euclidean building
3. 学会等名 Combinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 非可換な変数をもつ多項式行列の次数の計算について
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Hiroshi Hirai
2. 発表標題 Uniform semimodular lattice, valuated matroid, and Euclidean building
3. 学会等名 Combinatorial Geometries 2018: matroids, oriented matroids and applications (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Hiroshi Hirai
2. 発表標題 Computing degree of determinant via discrete convex optimization on Euclidean building
3. 学会等名 Recent Development in Optimization 2 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について
3. 学会等名 「数学と諸分野の協働推進による学際的・総合的な新領域研究の開拓」講演会 (招待講演)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 漸化式にもとづく多面体内の格子点の数え上げについて
3. 学会等名 応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Yuni Iwamasa
2. 発表標題 Reconstructing Phylogenetic Tree From Multipartite Quartet System
3. 学会等名 29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について
3. 学会等名 ワークショップ「離散構造とアルゴリズム」(招待講演)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 平井広志
2. 発表標題 一様半モジュラ束と付値マトロイド
3. 学会等名 応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 H. Hirai, Y. Iwamasa, K. Murota, and S. Zivny
2. 発表標題 Beyond JWP: A tractable class of binary VCSPs via M-convex intersection
3. 学会等名 the 35th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'18) (国際学会)
4. 発表年 2017年～2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	岩政 勇仁 (Iwamasa Yuni) (70854602)	京都大学・情報学研究科・助教 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------