

令和 3 年 6 月 8 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K00031

研究課題名(和文) 面削減法を用いた錐線形計画の双対理論と誤差解析

研究課題名(英文) Duality and error analysis on conic programming through facial reduction algorithms

研究代表者

村松 正和 (Muramatsu, Masakazu)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：70266071

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：大きな成果は2つある。1つは多面錐を含む非線形錐に関して、Facial Reduction Algorithm (FRA) の反復回数の上限が多面錐には依存しないことを示したことである。もう1つはChubanov が提案した、射影とスケールを用いて同次 LP の許容解を求める2種類の多項式アルゴリズムを1つは対称錐計画へ、もう1つは半無限計画へと拡張したことである。後者のアルゴリズムは、許容領域の「体積」を条件数として反復回数を評価する。特に条件数がゼロの場合は本プロジェクトのメインテーマであるFRAを適用すべき状態となっており、関連があることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最初の成果(多面錐を含む非線形錐に対するFRA反復回数の評価)は、特に最近注目を浴びている非負正定値錐に関してそのFRA 反復回数のオーダーを変えろというインパクトがあった。また、もう1つの Chubanov のアルゴリズムの拡張に関しては、錐線形計画に関する我々の理解を深めるとともに、「悪条件」にも様々な定義が様々あり、どの定義の悪条件かに依存して選択すべきアルゴリズムが異なってくることを提示した。これらはまだ直接的に社会的インパクトがある成果とは言えないかもしれないが、今後の進展の余地が多く、学術的意義は大きいと考えられる。

研究成果の概要(英文)：There are two major achievements in this project. The first one is to show that the upper bound of the iterations of Facial Reduction Algorithms (FRA) applied to a (nonlinear) cone containing polyhedral cones, depends only on that of the nonlinear part; in other words, we can safely ignore the polyhedral cones at least from the viewpoint of FRA. The other is to extend two of Chubanov's algorithms proposed for homogeneous LPs using projection and rescaling to symmetric cones and semi-infinite polyhedral cones, respectively. For these algorithms, we implemented them only for the semidefinite programming problem and conducted numerical experiments. The latter algorithm evaluates the number of iterations using the "volume" of the feasible region as the conditional number. Especially if the condition number is zero, then FRA, the main theme of this project, should be applied to the conic programming problem.

研究分野：錐線形計画

キーワード：対称錐計画 半正定値計画 2次錐計画 面削減法 凸最適化

1. 研究開始当初の背景

錐線形計画 (Conic Programming, 以下 CP) とは閉凸錐 K , 実線形部分空間 L として

$$(P): \inf \{cx : x \in (b+L) \cap K\}$$

と表現される最適化問題である。(本研究は基本的に有限次元の空間を考えている。) CP は線形計画 (Linear Programming, 以下 LP) の凸性を保ちながらの拡張であり、 K の取り方により半正定値計画 (SemiDefinite Programming, 以下 SDP), 2次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming, 以下 SOCP) などの様々な有用な最適化モデルが導かれ、現在盛んに研究されている。

錐線形計画 (P) には自然に双対問題 (D) が定義できる。しかし LP と異なり、CP には一般に双対ギャップ、すなわち、(P) と (D) の最適値が一致しない場合や、双対ギャップがなくても最適解が存在しない場合などがありうる。主問題と双対問題の両方に Slater 制約想定 (内点許容解が存在すること) が成り立てば、上記のようなことはなく、主双対内点法で安定して解けることが知られている。現在の SDP, SOCP などの解析は、ほとんど Slater 制約想定のもとで論じられている。Slater 制約想定が成り立たないことは、一種の退化現象であるが、LP の場合と同様、実問題を錐線形計画でモデル化すると高い確率でこれらの現象に出会う。

内点許容解が存在しない場合に対応するため研究が進められているのが Facial Reduction Algorithm (FRA) である。FRA により、悪条件の錐線形計画を (少なくとも理論的には) 扱うことができるようになったが、その意味合いに関しては、未だ理解されていないことが多かった。

2. 研究の目的

本研究は、FRA を道具として新しい錐線形計画の双対理論を打ち立てるとともに、SDP におけるその数値計算の実現可能性を探ることを目的としていた。その後、最初の研究計画にあった Ramana の双対問題に関する研究や SDP における FRA の実装の研究からは少し離れ、代わりに、Chubanov が提案した LP に対する2つの射影再スケーリングアルゴリズムを錐線形計画に拡張する仕事が重要な話題として認識されるようになった。それを明らかにすることにより錐線形計画の双対理論に関する理解が進んだ。その後、悪条件の錐線形計画問題は広く関心を集めるようになり、その理解が重要なテーマとして認識されるようになっていく。

3. 研究の方法

悪条件の錐線形計画に関する双対理論を、(i) FRA の反復回数の解析から誘導されるもの、(ii) Chubanov のアルゴリズムにおける条件数から導かれるもの、(iii) その他に分けて研究を実施した。下記研究成果において、(1) は (i) に関連する成果、(3)~(5) は (ii) の方向の成果、(2) は (iii) に該当する成果であるといえるが、厳密には1つの研究の流れにあり、お互いに混じっている部分がある。

4. 研究成果

FRA を主な道具として悪条件錐線形計画に関する理論的研究を実施し、以下の成果を得た。

- (1) 錐が非線形錐と多面錐の直積となっている場合について、FRA の反復回数の評価を行った。結果として、反復回数が非線形錐の性質のみに依存することを明らかにした。この結果をたとえば非負正定値行列錐に適用すると、FRA の反復回数のオーダーを変える結果が得られる。この結果は SIAM Journal on Optimization に発表された。
- (2) (1) の結果を、村松の博士課程学生が行っているネットワークに関するロバスト最適化の研究において活用した。この結果は IEICE Transactions on Communications および International Journal of Communication Systems に掲載された。
- (3) Chubanov が提案した、射影とスケーリングを用いて同次 LP の許容解を求める多項式時間アルゴリズムを対称錐に拡張した。対称錐は、半正定値錐や2次錐を含む性質の良い錐である。この研究により、対称錐におけるスケーリングの意味が明らかになった。この研究は最終的に Mathematical Programming に掲載された。また、RAMP シンポジウムにおいてもこの研究に関する講演を行なった。
- (4) Chubanov が提案した、オラクルと射影とスケーリングを用いて同次 LP の許容解を求める多項式アルゴリズムを半無限計画に拡張し、論文にまとめた。このアルゴリズムは、許容領

域の「体積」を条件数として反復回数を評価する。この条件数が小さいと反復回数が大きくなる構造になっており、特に条件数がゼロの場合は本プロジェクトのメインテーマである FRA を適用すべき状態となっている。この研究については Numerical Verification (NIVEA) 2019 など で発表を行なった。

- (5) (3) および (4) のアルゴリズムを半正定値計画問題に絞って実装し、数値実験を行なった。結果として、どちらのアルゴリズムも理論が予測する通りに動くこと、また、理論よりあまりよくはならないことが観察された。例えば単体法や内点法は理論よりはるかに効率的に LP を解くことが知られており、楕円体法は理論どおりにしか動かないこと(従って実用的とは言えないこと)が知られているが、Chubanov のアルゴリズムはちょうどこの中間に位置すると考えられる。2つのアルゴリズムがそれぞれ得意・不得意とする問題がはっきり分かれることが観察された。これは両者が扱う条件数の定義が異なることに起因する。一方に極端に不得意な問題がある方法で生成すると、もう一方には極端に易しくなってしまう、という現象を観察した。この研究は International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT) 2019 など で発表された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Bruno F. Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya	4. 巻 173
2. 論文標題 An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cones	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 117-149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10107-017-1207-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Lourenco Bruno F., Muramatsu Masakazu, Tsuchiya Takashi	4. 巻 28
2. 論文標題 Facial Reduction and Partial Polyhedrality	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 2304 ~ 2326
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/15M1051634	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 CHANDRA DAS Bimal, TAKAHASHI Satoshi, OKI Eiji, MURAMATSU Masakazu	4. 巻 E101.B
2. 論文標題 Network Congestion Minimization Models Based on Robust Optimization	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 IEICE Transactions on Communications	6. 最初と最後の頁 772 ~ 784
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1587/transcom.2017EBP3193	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Das Bimal Chandra, Takahashi Satoshi, Oki Eiji, Muramatsu Masakazu	4. 巻 32
2. 論文標題 Approach to problem of minimizing network power consumption based on robust optimization	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Communication Systems	6. 最初と最後の頁 e3891 ~ e3891
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/dac.3891	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bruno F. Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya	4. 巻 to appear
2. 論文標題 An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cones	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-017-1207-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bimal CHANDRA DAS, Satoshi TAKAHASHI, Eiji OKI, Masakazu MURAMATSU	4. 巻 E101.B
2. 論文標題 Network Congestion Minimization Models Based on Robust Optimization	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 IEICE Transactions on Communications	6. 最初と最後の頁 772-784
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1587/transcom.2017EBP3193	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Hoki, N. Araki, S. Takahashi, and M. Muramatsu	4. 巻 39
2. 論文標題 Improved Simulation Adjusting	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 ICGA journal	6. 最初と最後の頁 195-204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ICG-180036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Yuki Kimura and Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 A 2-approximation algorithm for minimum knapsack problem with single continuous variable
3. 学会等名 International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis and International Conference on Optimization Techniques and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Natsuki Okamura, Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 Solving SDP by projection and rescaling algorithms
3. 学会等名 International Conference on Continuous Optimization 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 Comparative Performance of Green Pipe, Green Hose, and Green Hose Rectangular Models in Power Efficient Network
3. 学会等名 IEEE-CQR (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 Extensions of Projection and Rescaling Algorithms
3. 学会等名 International Workshop on Control and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 An oracle-based projection and rescaling algorithm for linear semi-infinite programming and its application to semidefinite programming
3. 学会等名 International Symposium on Mathematical Programming (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masakazu Muramatsu
2. 発表標題 Extensions of Chubanov's Projection and Rescaling Algorithms
3. 学会等名 Numerical Verification (NIVEA) 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 村松正和
2. 発表標題 Chubanov による同次線形計画問題の内点許容解を求めるアルゴリズムとその拡張に関する最近の展開
3. 学会等名 RAMP シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masakazu Muramatsu, Bruno Lourenco, Takashi Tsuchiya
2. 発表標題 Partial Polyhedrality and Facial Reduction
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 辻啓太, 高橋里司
2. 発表標題 サービス選択市場の逆オークションモデルに対する動的計画法の適用
3. 学会等名 第2回国際ICT利用研究学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松本 翔太, 村松 正和
2. 発表標題 機械学習を用いた東京都23区におけるマンション価格の予測
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Bruno Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya
2. 発表標題 An Extension of Chubanov's Algorithm to Symmetric Cones
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	高橋 里司 (Takahashi Satoshi) (40709193)	電気通信大学・大学院情報理工学研究所・准教授 (12612)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------