

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K00037

研究課題名（和文）離散凸最適化におけるスケーリング近接性の研究

研究課題名（英文）Scaling and proximity properties of discrete optimization

研究代表者

森口 聡子（MORIGUCHI, Satoko）

東京都立大学・経営学研究科・准教授

研究者番号：60407351

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：離散最適化に対して、スケーリング技法を軸とするアルゴリズム効率化のための理論体系を構築することを目的とし、また理論の応用を見据えて、研究を推進した。スケーリングとは、定義域の偶数点のみを見る、などのように、目盛を間引いた関数近似の導入で効率化を図る技法で、古典的なネットワークフローや資源配分問題で多くの成功例が知られている。

本研究では、これまでスケーリング技法や近接定理について考えられていなかったより広い離散関数のクラスに対する拡張と理論構築を試み、効率的なアルゴリズムが構築可能なクラスの解明を進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

コンピュータ科学、オペレーションズ・リサーチ、経済学、ゲーム理論、数学などの様々な分野の研究者が、離散凸関数の概念に基づいた最適化において、スケーリング、近接性に関する議論がしやすくなり、効率的なアルゴリズムを用いることができるようになる。また整数計画の理論の応用や、一般的な数値最適化ソルバーの利用がしやすくなるという今後の展開も開けることが期待される。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to construct a theoretical system for algorithm efficiency improvement based on scaling techniques for discrete optimisation, and to promote research with a view to applications of the theory. Scaling is a technique for improving efficiency by introducing a function approximation with a reduced scale, such as looking only at even points in the domain, and many successful examples are known in classical network flow and resource allocation problems.

In this study, we attempted to extend and build a theory for a wider class of discrete functions for which scaling techniques and proximity theorems have not been considered, and we made progress in clarifying the classes for which efficient algorithms can be constructed.

研究分野：数理工学

キーワード：離散凸解析 最適化理論 アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

離散凸解析は、マトロイド・劣モジユラ関数に関する研究の流れを汲み、1990年代中頃より室田氏(東京都立大学・統計数理研究所)によって提唱されて以来、盛んに研究されてきた。M凸性とL凸性という2つの概念を基礎とし、連続と離散を繋ぐ統一的理論、離散最適化における凸解析の枠組として国際的に認知されていた。研究代表者も、離散凸構造に着目した各種のアルゴリズムや離散凸解析理論の確立に不可欠な性質の究明、理論とアルゴリズムの各分野への応用に取り組んできた。

スケーリングとは、定義域の偶数点のみを見る、などのように、目盛を間引いた関数近似の導入で効率化を図る技法で、古典的なネットワークフローや資源配分問題で多くの成功例が知られている。離散凸性に関連するところでは、スケーリング技法による効率的なアルゴリズムと、スケーリングアルゴリズムの計算量の上界を保証する近接定理に関する結果が、劣モジユラ関数、分離凸関数、 M_h 凸関数、 L_h 凸関数の最小化やM凸劣モジユラ流問題に対して知られていた。

しかし、 M_h 凸関数と L_h 凸関数の両方を含むより広いクラスに対しては、スケーリングの観点での研究がなされてこなかった。 M_h 凸関数と L_h 凸関数の両方を含むより広いクラスである整凸関数に対して、数値実験により得られた部分的な結果を契機として、整凸性より限定的であるが、 M_h 凸性と L_h 凸性の両方を包含する新たな関数クラスを模索することから、研究を進めるに至った。

2. 研究の目的

離散最適化に対して、スケーリング技法による実装上と理論上の両面から効率的であるアルゴリズムの構築を目指した理論体系を構築することを目的とした。離散凸解析のこれまでの研究により、各種の離散凸関数の最小化に対して、スケーリング技法が有効であり近接定理による理論保証が明らかになっていた、しかし、 M_h 凸関数と L_h 凸関数の両方を含むより広いクラスに対しては、スケーリングの観点での研究がなされてこなかった。また部分的にしか解明できていなかったスケーリング近接性に関する結果は、より詳細に解明できるはずであり、応用の局面で出現する他の様々な問題にも離散凸性のメリットを享受させられるであろうとの期待が、着想に至った経緯である。

本研究の目的は、これまでスケーリング技法や近接定理について考えられていなかったより広い離散関数のクラスに対する拡張と理論構築を試み、効率的なアルゴリズムが構築可能なクラスの解明を行うこととした。

3. 研究の方法

M_h 凸性と L_h 凸性の両方を包含する新たなクラスで、スケーリング技法による効率的なアルゴリズムが期待できる最も一般的なクラスの一つと位置づけられる離散中点凸性の理論を整備することからまず取り組み、効率的なアルゴリズムが構築可能な離散凸関数のクラスの解明を行っていった。線形距離の近接性に対する反例が存在する整凸性については、指数距離の近接性を示していった。必要に応じ、数値実験による予想も有効活用した。

4. 研究成果

(1) 離散中点凸関数

代表的な離散凸関数を多くその特殊ケースとして含み、一般性の高い離散凸関数として知られる整凸関数について、スケーリングに関して閉じておらず、近接定理についても近接上界が多項式性をもたないことを明らかにした。理解が深まったからこそ、次なる疑問が生じた。それは、整凸関数のうち、スケーリング可能な関数の持つ構造は明らかにできるのか、整凸関数のもつ超指数関数上界の近接定理よりも効率性の高い近接定理を示せる関数クラスは構築できるのか、ということである。既存の結果との乖離として生じた新たな研究課題に対して、 L_h 凸関数と整凸関数の中間に位置する新しい関数クラスである離散中点凸性を考案し、その構造理解とアルゴリズムの開発を行った。この関数族の性質を精査し、この関数族が平行四辺形不等式を満たすこと、2近傍最小性判定が有効であること、スケーリングについて閉じていること、次元に関して線形の近接上界をもつことを示し、これに基づいて、離散中点凸関数の最小化アルゴリズム、2近傍最急降下法とスケーリング近接法を設計した。

(2) 整凸関数に対するスケーリング近接性と最適化

代表的な離散凸関数を多くその特殊ケースとして含み、経済学における非線形方程式離散システム、離散不動点定理、有限対称ゲームにおけるペイオフ関数等、幅広い分野で応用のある一般性の高い離散凸関数のクラスとして知られている整凸関数に対して、スケーリング技法と近接

定理について研究し、スケーリング近接性に基づく最小化アルゴリズムに関する研究を行った。近接定理とは、近似で得られた暫定的な解（近似解）と、真に求めたい解との距離を理論的に保証しようとする定理で、この定理が導き出せると、スケーリング技法による理論的に効率的なアルゴリズムの構築につなげることができる。離散凸解析に関連するこれまでの研究により、各種の離散凸性を有する離散関数（離散凸関数）の最小化に対して、スケーリング技法が有効であり近接定理による理論保証が明らかになっていた。しかし、整凸関数については、その一般性の高さから国内外の研究者が検討しても成果が知られておらず、未解決問題とされていた。

本研究ではまず、未解決問題であった一般的な整凸関数のスケーリング可能性について、スケーリング演算に関して閉じておらず、近接定理についても近接上界が多項式性をもたず超指数関数になることを明らかにした。さらに、整凸関数に対する初めてのスケーリング技法によるアルゴリズムを構築した。

（３）離散凸概念の包含・交差関係

離散凸解析においては、 M 凸関数、 L 凸関数を始めとして、様々な離散凸関数の概念があり、離散凸関数のそれぞれの概念に対応して、離散凸集合の概念が定義されている。本研究では、離散凸関数と離散凸集合のクラスの間になり立つ包含関係と交差関係を網羅的に整理した。これによって、様々な分野の研究者が離散凸関数の概念を容易に理解できるようになると期待される。マルチモジュラ集合は L_h 凸集合から座標変換によって得られるという意味で L_h 凸集合と等価であるが、一方、2次元空間においてはマルチモジュラ性と M_h 凸性は一致することが知られていた。本研究により、高次元の空間におけるマルチモジュラ性と M_h 凸性の関係性が明らかとなった。

（４）離散凸集合に対する多面体的表現

離散凸集合の凸包を不等式系で記述することは、離散最適化の定石的手法である多面体的アプローチの出発点となる。離散凸解析においては、 M 凸集合、 M_2 凸集合（2つの M 凸集合の共通部分）、 L 凸集合、マルチモジュラ集合については、対応する不等式系の特徴が知られていたが、 L_2 凸集合（2つの L 凸集合のミンコフスキー和）については未知であった。本研究では、不等式系に対する変数消去の手法（Fourier-Motzkin の方法）を用いて L_2 凸集合の凸包を記述する不等式系を導出した。また、同じ結果に対して、共役性定理と M 凸交差定理を組合せた構造的手法による別証明を与えた。

（５）マルチモジュラ関数、整凸関数をはじめとする離散凸関数における基本的演算

離散凸解析においては、 M 凸関数、 L 凸関数、整凸関数、マルチモジュラ関数など、種々の関数クラスが考察されるが、それぞれの関数クラスにおいて許容される演算は異なり、連続変数とは異なる注意が必要である。変数のスケーリングや関数の和といった基本演算、および、ネットワークによる変換に関係する演算に関して、それぞれの関数クラスに許容される演算を網羅的に調べた。このような網羅的整理によって、様々な分野の研究者が離散凸解析を利用する際に有用な情報を提供した。

（６）育種学における二次錘緩和アプローチ

離散凸関数の応用に関する研究では、農学における育種学に表れる種別構成問題の短時間解法を適用例として、離散凸構造が曖昧な離散関数に対して、スケーリングの概念に基づいて離散凸最小化アルゴリズムを適用する、いわゆる『離散凸緩和解法』の有用性を示唆した。同種の木であっても、遺伝子型のレベルで見れば数千以上の遺伝子型が存在し、それぞれで遺伝的価値も異なる。これら複数の遺伝子型をどのような割合で用いるのが造林の遺伝的価値を最も高めるか、という最適化問題は、林木育種において重要な数理問題の1つである。単純に考えると、遺伝的価値の高い遺伝子型の割合を多く含むのが良さそうであるが、似通った遺伝子型のみを多用してしまうと、樹木の世代が進んだときに近親交配が進んでしまうため、環境の変化に対応できないなど弊害がある。つまり、「遺伝子型の多様性に関する制約を考慮した上で全体の価値を最大にする」という育種学の種別構成問題への求解が要求される。本研究では、錐最適化理論をベースとして構築した種別構成問題に対する最適化解法を開発した。従来の数値解法では5時間以上かかっていた計算が、本稿の数値解法では2秒程度で可能となり、顕著な計算時間の短縮を実現している。種別構成問題では遺伝子型などのデータを変えながら計算を行うといったことがあり、この計算時間短縮の効果は大きい。当該研究の成果により、数理最適化理論は、育種学の種別構成問題に対する強力なツールとなるポテンシャルを持っていることを顕示できた。

（７）ITプロジェクトスケジューリング

応用研究として、ITプロジェクトマネジメントにおけるスケジューリングさぎょうの効率化における最適化の研究を行った。一般にプロジェクトの納期とコストはトレードオフの関係にあり、優先度はプロジェクトが置かれた環境や状況次第で変化する。本研究では、納期、要員の重複タスク日数、要員数の3式の目的関数を最小化する自動スケジュール生成ソフトウェアを提案した。一般的なPCを用いて現実的な時間内でスケジュールを生成した。また、数値実験、及び実務家へのインタビューにより、有効性を示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo	4. 巻 40
2. 論文標題 Note on the polyhedral description of the Minkowski sum of two L-convex sets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 223 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00512-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo	4. 巻 66
2. 論文標題 Inclusion and Intersection Relations Between Fundamental Classes of Discrete Convex Functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 187 ~ 217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.66.187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Safarina Sena, Moriguchi Satoko, Mullin Tim J., Yamashita Makoto	4. 巻 275
2. 論文標題 Conic relaxation approaches for equal deployment problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 111 ~ 125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2019.04.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo, Tamura Akihisa, Tardella Fabio	4. 巻 45
2. 論文標題 Discrete Midpoint Convexity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Operations Research	6. 最初と最後の頁 99 ~ 128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1287/moor.2018.0984	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo	4. 巻 62
2. 論文標題 On Fundamental Operations for Multimodular Functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 53 ~ 63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.62.53	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 山下 真, Safarina Sena, Mullin Tim J., 森口 聡子	4. 巻 57-11
2. 論文標題 育種学に表れる種別構成問題に対する短時間数値解法の構築	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 58 ~ 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo, Tamura Akihisa, Tardella Fabio	4. 巻 175
2. 論文標題 Scaling, Proximity, and Optimization of Integrally Convex Functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 119 ~ 154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-018-1234-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo	4. 巻 255
2. 論文標題 Projection and convolution operations for integrally convex functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 283 ~ 298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2018.08.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 小林 敬明、森口 聡子	4. 巻 11-3
2. 論文標題 多目的遺伝的アルゴリズムによるITプロジェクトスケジューリング	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 情報処理学会論文誌, 数理モデル化と応用	6. 最初と最後の頁 42~57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Moriguchi Satoko, Murota Kazuo, Tamura Akihisa, Tardella Fabio	4. 巻 31
2. 論文標題 Algorithms for discrete midpoint convex functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート420, 最適化: モデリングとアルゴリズム	6. 最初と最後の頁 196~209
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 森口聡子, 室田一雄
2. 発表標題 L2凸集合の多面体表現
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2022年秋季研究発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 榎谷将吾, 森口聡子, 増山博之
2. 発表標題 重み付き有向ネットワークにおける2つの対象間の相対的関係性指標
3. 学会等名 第2回計算社会科学学会大会 (CSSJ2023)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森口聡子, 室田一雄
2. 発表標題 離散凸関数の族に関する包含・交わり関係
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年秋季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森口聡子, 本田亮
2. 発表標題 数理最適化によるソーシャルディスタンス調整を伴うオフィスワーク管理
3. 学会等名 プロジェクトマネジメント学会2021年度春季研究発表大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yamashita Makoto, Safarina Sena, Mullin Tim J., Moriguchi Satoko
2. 発表標題 An efficient mathematical approach for optimal selection problems in tree breeding
3. 学会等名 2019 International Symposium for Advanced Computing and Information Technology (ISACIT 2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Moriguchi Satoko, Tamura Akihisa, Tardella Fabio, Murota Kazuo
2. 発表標題 Scaling, proximity, and optimization of integrally convex functions
3. 学会等名 23rd International Symposium on Mathematical Programming (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tardella Fabio、Murota Kazuo、Tamura Akihisa、Moriguchi Satoko
2. 発表標題 Discrete midpoint convexity
3. 学会等名 23rd International Symposium on Mathematical Programming (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森口聡子, 室田一雄
2. 発表標題 マルチモジュラ関数の基本演算について
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年秋季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Moriguchi Satoko、Murota Kazuo、Tamura Akihisa、Tardella Fabio
2. 発表標題 Discrete Midpoint Convexity
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2017年秋季研究発表会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Moriguchi Satoko、Murota Kazuo、Tamura Akihisa、Tardella Fabio
2. 発表標題 Algorithms for discrete midpoint convex functions
3. 学会等名 最適化：モデリングとアルゴリズム
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

DCP (Discrete Convex Paradigm)
<https://cs.kwansei.ac.jp/~tutimura/DCP/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Sapienza University of Rome			
スウェーデン	The Swedish Forestry Research Institute			