

令和 3 年 6 月 5 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K00053

研究課題名(和文)熱力学的視点によるBayes予測の新展開

研究課題名(英文)A new development of Bayesian prediction from the viewpoints of thermodynamics

研究代表者

大西 俊郎(OHNISHI, Toshio)

九州大学・経済学研究院・教授

研究者番号：60353413

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：理論研究の成果として次の2つを得た。1つはBayes予測問題に関するものである。推定問題では確率分布の関数形を既知として未知パラメータを推定するのに対し、予測問題では確率分布の関数形も含めて推定する。これをBayes統計学の枠組みで行うのがBayes予測問題である。予測の良さを  $\alpha$ -ダイバージェンスと呼ばれる量で測るとき、典型的な予測分布の改善に取り組んだ。もう1つは、Jeffreysの事前分布の特徴づけである。Bayes統計学では未知パラメータに関する情報を事前分布の形で組み込む。パラメータに関する情報を持たないときに仮定される代表的なものがJeffreysの事前分布である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Bayes予測問題では、無情報量事前分布と呼ばれる事前分布に基づくBayes予測分布がデフォルトとして用いられることがある。一定の条件の下でこれが改善されることを示した。Jeffreysの事前分布は無情報量事前分布の代表的なものである。パラメータを変換したときでも事前分布が不変という意味で無情報量とされているが、本研究では、指数型分布族における自然パラメータを対象にするという舞台設定の下で、この代表的な無情報量事前分布の特徴づけを行った。

研究成果の概要(英文)：The following two results were obtained by theoretical researches. One is about Bayesian prediction problem. While the functional form of a true distribution is assumed to be known and its unknown parameter is estimated in the estimation problem, the probability distribution itself is estimated in the prediction problem. Bayesian prediction problem considers the prediction problem in the framework of Bayesian statistics. I made a research on improving a typical predictive distribution when the goodness of prediction is measured by what is called the  $\alpha$ -divergence. The other result is a characterization of Jeffreys prior. In Bayesian statistics the prior distribution is assumed by using the information about an unknown parameter. Jeffreys prior is such a prior distribution that is assumed when no information is available.

研究分野：統計科学

キーワード：Bayes予測 ダイバージェンス Jeffreysの事前分布 Tweedie分布

1. 研究開始当初の背景

(1) Bayes 予測問題 (理論研究 1)

確率分布の関数形を既知とし、未知パラメータを推定するのが推定問題である。確率密度関数の推定問題が予測問題であり、パラメータ推定問題の一般化となっている。これを Bayes 統計学の枠組みで行うのが Bayes 予測問題である。推定結果の確率分布は予測分布と呼ばれる。予測の良さは、真の分布と予測分布との乖離度で測られる。乖離度としてよく採用されるのが、Kullback-Leibler ダイバージェンスと呼ばれる擬距離である。距離と違って対称性がないため、真の分布から予測分布への Kullback-Leibler ダイバージェンスは、予測分布から真の分布への Kullback-Leibler ダイバージェンスとは異なる。

Bayes 予測問題では事前分布を仮定する。事前分布とは、いわば未知パラメータに関するシナリオである。シナリオを決めると最良な予測分布 (= Bayes 予測分布) が 1 つ決まるが、別のシナリオの下では最良ではない。未知パラメータの値によらず一様に、ある予測分布が別の予測分布によって改善されることは稀である。このような改善は「頻度主義の意味での改善」と表現される。

(2) Jeffreys の事前分布の特徴づけ (理論研究 2)

Bayes 統計学において、事前分布の選択は重要な問題の 1 つである。未知パラメータに関する事前情報を確率分布として表現したものが事前分布であり、データ解析者がパラメータに関する情報を持っていないとき、無情報量事前分布が仮定されることが多い。無情報量事前分布の代表格が Jeffreys の事前分布である。パラメータ変換に関する不変性を持つことが知られており、この意味において無情報量と言われている。

(3) Tweedie 分布における Bayes 推測 (応用研究)

Tweedie 分布は複合ポアソン分布とも呼ばれ、原点において離散的であり、正の領域において連続的という特徴をもち、応用上非常に有用な確率分布である。降水量や支払損害保険金のデータ解析に応用できる。Tweedie 分布は、指数型分布族に属しており、理論的にもきれいな性質をもっている。

2. 研究の目的

(1) Bayes 予測問題 (理論研究 1)

分散共分散行列が単位行列である多変量正規分布における Bayes 予測問題について、先行研究から次のことが分かっていた。

予測分布からの真の分布への Kullback-Leibler ダイバージェンスを損失とすると、Jeffreys の事前分布に基づく最適予測分布は最尤推定量をプラグインしたものととなり、これは一定の条件の下で Bayes 推定量をプラグインした予測分布によって頻度主義の意味で改善される。

真の分布から予測分布への Kullback-Leibler ダイバージェンスを損失とすると、Jeffreys の事前分布に基づく最適予測分布が (ケース の条件と似た) 一定の条件を満たす Bayes 予測分布によって頻度主義の意味で改善される。

-ダイバージェンス損失は Kullback-Leibler ダイバージェンス損失の一般化であり、 $\alpha = +1$  のときが上記の に該当し、 $\alpha = -1$  のときが上記の に該当する。損失関数を

-ダイバージェンス損失にしたときに、Jeffreys の事前分布に基づく最適予測分布を頻度主義の意味で改善するための条件を求めることが目的である。

(2) Jeffreys の事前分布の特徴づけ (理論研究 2)

Jeffreys の事前分布は、パラメトリックな標本分布に対して仮定される。具体的には、標本分布の Fisher 情報行列を使って定義される。本研究の目的は、パラメータ変換に対する不変性とは異なる観点から、Jeffreys の事前分布を特徴づけることである。また、対象とする標本分布を指数型分布族とすることにより、尤度を用いた推論への含意を明らかにしたいと考えていた。指数型分布族は正規分布、ガンマ分布、2 項分布およびポアソン分布などを含む応用上非常に重要な分布族である。事前分布と事後分布が同一の関数形をもつとき、その事前分布は共役事前分布と呼ばれる。指数型分布族は共役事前分布を持つことが知られている。

(3) Tweedie 分布における Bayes 推測 (応用研究)

Tweedie 分布において、実行可能かつ性能の良い経験 Bayes 推定法を構築することが目的である。経験 Bayes 推定とは、事前分布に含まれる超パラメータをデータから推

定し, Bayes 推定量に代入するという推定方法である. 未知パラメータを多く含む複雑なモデルにおいて, 最尤法より Bayes 法の方がパフォーマンスがよいことは経験的に知られている.

### 3. 研究の方法

#### (1) Bayes 予測問題 (理論研究 1)

これは神戸大学の丸山祐造教授と理化学研究所の松田孟留氏との共同研究である. 「2. 研究目的」欄で述べたケースとで採用された損失関数は互いに双対と言われる. また, これらを一般化したのが  $\alpha$ -ダイバージェンス損失関数であり, 双対な 2 つの損失関数を連続的につなぐことが知られている. 双対性および連続性に着目し, 研究を推進した. 具体的には,  $\alpha$ -ダイバージェンス損失の下で優れた Bayes 予測分布を導くための条件を調べ,

- ✓  $\alpha$  の値が +1 に近いときの十分条件はケースと連続的につながっており,
- ✓  $\alpha$  が -1 に近いときの十分条件はケースと連続的につながっている

ことを明らかにし, 研究の出発点とした.

#### (2) Jeffreys の事前分布の特徴づけ (理論研究 2)

これは統計数理研究所の柳本武美名誉教授との共同研究である. 指数型分布族は, 共役事前分布をもつという理論的にも非常にきれいな性質を持っている. 共役事前分布とは事前分布と事後分布が同一の関数形になる事前分布である. また, 指数型分布族に特徴的なこととして, 正準パラメータというパラメータを具備していることが挙げられる. 正準パラメータは自然パラメータと呼ばれることもあり, 指数型分布族以外では一般に表れない. 指数型分布族は有限個の確率分布の幾何平均として理解できる. 粗く言えば, 幾何平均をとるときのウェイトが正準パラメータである. これらに着目して研究を進めた.

#### (3) Tweedie 分布における Bayes 推測 (応用研究)

これはサンシャインコースト大学 (オーストラリア) の Peter Dunn 准教授との共同研究である. Tweedie 分布はその確率密度の計算が難しいのであるが, Dunn 准教授が開発した優れたパッケージソフトにより, 高い精度での計算が可能となっている. また, 研究代表者の以前の研究により, Tweedie 分布の尤度関数は location family のそれと似ていることが分かっている. この location family は曲指数型分布族に属し, かつ, 共役事前分布をもつことが分かっている. Dunn 准教授と研究代表者との知見を有機的に組み合わせることで研究の進展を狙った.

### 4. 研究成果

#### (1) Bayes 予測問題 (理論研究 1)

比較的よく使われる事前分布に無情報量事前分布と呼ばれるものがある. Jeffreys の事前分布がその代表格である. 分散共分散行列が単位行列であるような多変量正規分布を考察の舞台とすると, Jeffreys の事前分布に基づく Bayes 予測分布は一定のよい性質をもつことが知られている. 考察の結果, 事前分布などが一定の条件を満たすときに, 当該事前分布に基づく Bayes 予測分布がターゲットの Bayes 予測分布を頻度主義の意味で改善することを明らかにした. この結果を「5. 主な発表論文等」欄にあるとおり, 国際誌に発表した. よい推定法の考案は重要であり, 特に, 一般的によりとされる推定方法を改善することは意義が大きい.

#### (2) Jeffreys の事前分布の特徴づけ (理論研究 2)

Jeffreys の事前分布は, (1) 共役事前分布を仮定する, および, (2) 正準パラメータに着目することにより,

「事前分布における正準パラメータの期待値が, 共役事前分布が含む情報量をゼロにする極限で, 非常に速いスピードで共役事前分布自身をもつ正準パラメータに収束する」

ことによって特徴づけられることを明らかにした. この特徴づけは, 対応する事後分布の下では, データサイズが無大になる極限で, 正準パラメータの事後期待値が非常に速いスピードで最尤推定量に収束することに対応する. 「5. 主な発表論文等」欄にあるとおり, この成果を国際研究集会で発表し, 論文として発表した. データ解析においてよくつかわれる Jeffreys の事前分布がもつ意味を明らかにした点に学術的な意義がある.

#### (3) Tweedie 分布における Bayes 推測 (応用研究)

本研究では, 第 1 ステップとして回帰構造のないモデルにおける経験 Bayes 推定を考

察した。Tweedie 分布は指数型分布族に属し、共役事前分布が存在する。これらの事実を上手く利用して経験 Bayes 推定量を構成することに取り組んだ。将来的には Tweedie 分布をベースにした一般化線形モデルにおける経験 Bayes 推定を考察したいと考えている。研究代表者の基盤研究(C)「熱力学的視点による予測問題における Stein 現象への接近」(2020~2023 年度)で継続的に取り組む予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuzo Maruyama, Takeru Matsuda, Toshio Ohnishi	4. 巻 65
2. 論文標題 Harmonic Bayesian Prediction Under $\alpha$ -Divergence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 5352 - 5366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TIT.2019.2915245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takemi Yanagimoto, Toshio Ohnishi	4. 巻 ---
2. 論文標題 A Characterization of Jeffreys' Prior with Its Implications to Likelihood Inference	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pioneering Works on Distribution Theory: In Honor of Masaaki Sibuya	6. 最初と最後の頁 103-121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-9663-6_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Toshio Ohnishi
2. 発表標題 Dual Roles of Maximizing Likelihood and Shannon Entropy under Alpha-divergence Loss
3. 学会等名 The 4th Eastern Asia Meeting on Bayesian Statistics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takemi Yanagimoto and Toshio Ohnishi
2. 発表標題 Conjugate Analysis under Jeffreys' Prior with its Implications to Likelihood Inference
3. 学会等名 Pioneering Workshop on Extreme Value and Distribution Theories In Honor of Professor Masaaki Sibuya (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	丸山 祐造  (Maruyama Yuzo)		
研究協力者	柳本 武美  (Yanagimoto Takemi)		
研究協力者	ダン ピーター  (Dunn Peter)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
オーストラリア	University of the Sunshine Coast		