

令和 2 年 6 月 26 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K00967

研究課題名(和文)テクノロジーを利用した数理的現象の探究の教材開発と授業実践

研究課題名(英文) development of teaching material and lesson study focused of the mathematical inquiry about scientific phenomena using mathematical software

研究代表者

飯島 康之(Yasuyuki, Iijima)

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：30202815

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：数学ソフトを使って数学的現象を深く探究すると、得られた観察結果(事実)をどう解釈し、次に何を問題とすべきか、そのためにどんな手段を採用するかなどに多様性が生まれ、多様な数学的探究が生まれる。距離センサなどを使った実験では、データをその場で処理できるソフトを使うことで、即時に表示されるグラフを元に実験の修正や、問題の発展など、探究のサイクルを短時間で回していける。また、超音波距離センサをラズベリイパイに接続し、プログラミングで制御するような探究では、ボトルネックの所在を検討し、探究する幅が広がることが分かった。また、それらの教材化や授業研究を行い、知見を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学校数学で扱う範囲の問題でも、数学用ソフトを使うと、多くの数学的現象を観察することができ、時には未解決の問題があることも実感でき、次に何をすべきかを考えるべき数学的探究の可能性が広がることを、具体的な事例とともに示すことができた。また、距離センサなどを使った実験では、実験の精度が高くなるだけでなく、すぐに結果を可視化されその場で検討できることから、よりよい実験の仕方などを高校生が考えることに焦点を当てた実践が行えた。数学用ソフトを使って探究の多様性に焦点を当てた教材開発や授業実践のための具体的な事例と今後への指針を提供することができた。

研究成果の概要(英文)：Using mathematical software, we can observe various phenomena. We can interpret them, and make new problem. In some problem, we found some facts which were named "monster", with which we realized that this problem was very interesting. We can select mathematical reasoning to solve it or improvement of the program to observe much. We did case studies about such mathematical inquiry using dynamic geometry software GC/html5 and mathematical inquiry using Python and mathematica. And we did lesson study using GC/html5 at ten (junior and senior high) schools. In the case of using motion detector, we can get the graph easily and can do decision making about what to do next. In the senior high school lesson, student could do many trials of experiment to get nice data.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育学 動的幾何 数学的探究 科学教育 授業研究 理数探究

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

申請者は、1989年から動的幾何ソフトとしての Geometric Constructor(DOS版, Windows版, Java版, html5版)を開発し、多くの先生方との教材開発や授業研究を行ってきた。特に2010年以降は、iPadなどのタブレットの登場に伴い、協働学習の中でのICT利用の可能性を研究してきた。一方世界的な動向としては、GeoGebraなど、より統合的なソフトによって様々な数学を探究できる環境や、ラズベリィパイ、Arduino、microbitなど、さまざまなプラットフォームを中心に様々な教材開発が着手され、STEM教育を行うためのソフト・ハードが充実してきた。また、我が国の学習指導要領においては、これまでICTを深く使った学びはむずかしかったが、特に高校の理数探究などでは、それを具現化していく可能性が広がってきた。

### 2. 研究の目的

動的幾何ソフトなど、数学的現象(観察結果)や誤差などを原動力として数学的探究のサイクルが回っていく様相を分析し、それを盛り込んだ教材開発や授業設計・実践をするための指針を明確化すること。

数学的現象に関する数学的探究と、自然科学的な現象を数学的に探究する数理的探究との類似性や相違点を明らかにすること。

実測など、自然科学的な現象を数学ソフト等を使って探究する教材開発や授業設計・授業実践を行うとともに、動的幾何ソフトに関する教材開発・授業設計などと共通点や相違点を明らかにすること。

### 3. 研究の方法

(1) データロガーや距離センサによって実施可能な教材について、既存の道具を使った探究と比較しながら、数理的探究の特徴を明らかにし、その教材化や授業設計・実践を行う。

(2) 動的幾何ソフト GC/html5を中心として、数学的現象を数学用ソフトを使った数学的探究について、ケーススタディを中心に、その特徴を明らかにするとともに、その教材化や授業設計・実践を行う。

授業実践に関しては、愛知教育大学附属高等学校、愛知教育大学附属名古屋中学校などの附属学校の他、国内の10校程度の中学校の協力を得つつ、メーリングリスト等によって、日常的な研究交流を行う。また、実践に使うタブレットに関して、必要に応じて、当方の機器の貸し出しを行う。

### 4. 研究成果

まず、本研究を通して明らかになったことの一つは、数学的探究においても数理的探究においても、探究のサイクルにおいて果たす「事実」あるいは「観測結果」の重要性である。もちろん、サイクルを回すためには、その解釈の多様性や、次に何を問題として考えるかという点も重要なのだが、事実をより豊富に観察可能にするという数学ソフトの役割を改めて実感することができた。

#### (1) GC/html5の例から

ABCの内角の和は $180^\circ$ である。しかし、GC/html5を使った測定結果として、図1のようなものが「ある」。「そんなことはあるはずがない」と思っていることが「ある」。なぜだろう。注目する必然性を示す上で、こういう「事実の存在」はとても大きい。

なぜ、そんなことがあるのだろうか。推論する手もあれば、いろいろな場合を調べる手もあるし、ソフトの使い方を変えて、小数点以下まで表示する手もある。つまり、「次の一手」は複数あり、どれを選択するかによって、探究の様相は変わっていく。

「小数点以下が、たとえば、7,7,6ならば、すべてが切り上げられるので、和が181になることもありうる」という事実を見いだすことで、「存在」が確実であることを示すことができるが、関連して、「他にどんな場合がありうるだろうか」という問いに発展させることもできる。また、たとえば、100個くらいの事例を調べてみることによって、果たして、180, 179, 181となる割合、つまり確率がそれぞれのどれくらいなのだろうかということが、次に注目してもよいはずの問題として登場する。この問題に取り組むために次に何をすべきかという方法も、複数存在する。手でたくさん調べる、記録を自動化してデータをたくさん収集する。Excelやプログラミング言語でシミュレーションをする。角の大きさの分布を仮定して推論する。

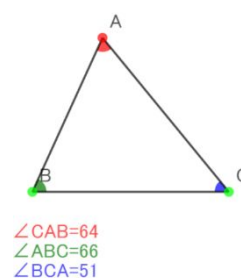
このように、数学的現象の観察等を出発点とし、複数の選択肢の存在やその選択の意思決定によって多様な数学的探究が生まれる事例を蓄積し教材化した。

#### (2) Pythonやmathematicaを使った問題の例から

完全数や友愛数などとしてどんな数があるかを調べることを一般化するために、次のような数列とそれに関する問題を考えた。

$$a(1)=n, a(n+1)=a(n)の自分以外の約数 (l = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

この数列がずっと同じ数になる場合は完全数、一つおきに同じ数になる場合が友愛数、ある周期を持つ場合が社交数になる。この数列が有界であれば、これらのいずれかに帰着されることになる。そうでない場合は、数列が無限に発散することになる。発散する場合はあるのだろうか



か。

これは、コラッツの問題(偶数ならば2で割り、奇数ならば3倍して1加えて次の項をつくる数列。これが発散することはあるか)と似ている問題の構造である。

この問題は、手計算では、ほんの数項を調べるだけで破綻してしまう。ラズベリィパイ上で、Python3 を使って処理すると、 $n=1,10000$  に関して、第10項まで調べてみると、半数くらいと10項まででは収束しないことが多いことがわかる。 $n=138$  のときは、20項以上続く。同様の例は、初項が6の倍数のことが多いことがわかる。 $n=138$  の場合、8時間かかってやっと115項がわかったが、アルゴリズムの改良が必要になる。改良の結果、 $n=138$  の場合、178項で1に収束することがわかった。 $n=138$  のようなケースを「モンスター」と呼ぶことにする。次に手ごわいモンスターとして登場したのは、 $n=276$  であった。アルゴリズムの改良を重ねても解消できない。Python用のライブラリ SumPy を使ってみたり、コンピュータの性能を上げても解消できない。そこで、mathematica を使った。実は mathematica の使い方においても、単にマニュアルに従って正しく入力すれば同じような速度で計算されるわけではなく、入力の仕方によって処理速度はかなり変わることがわかった。また、実際  $n=276$  の場合について、次の結果まではわかっているが、その先までは調べていない。

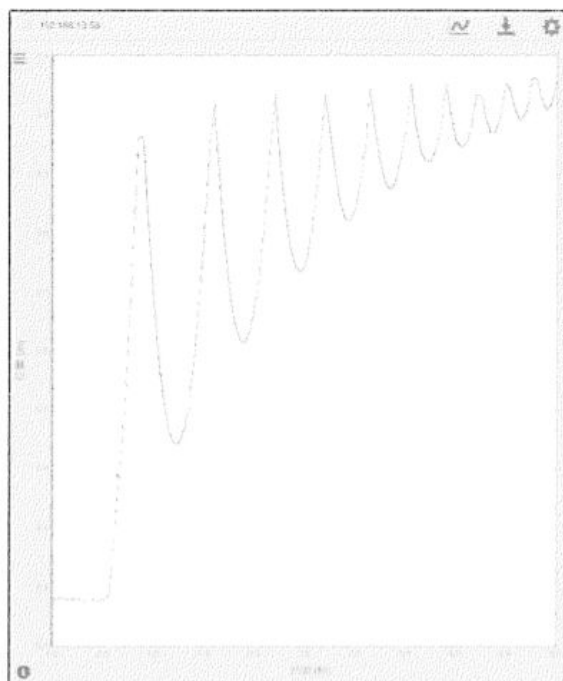
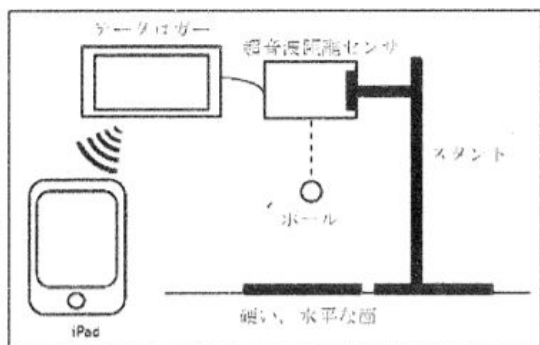
$a(680) = 5248698215965193679320672346536973616522368533439952440908280711938372252$

この事例において重要なことは、コンピュータによって、観察可能な数学的現象の世界が広がるということである。さらに、たくさん調べれば仮説が検証されるとは限らず、検証不可能な問題が見つかったり、それを調べていくために、副次的な問題、たとえばアルゴリズムの改良とか、適切なソフトの使い方など、様々な現実的な問題が生まれ、それについて取り組むことによって、数学的探究が進んでいくということである。

本研究の中では、この事例以外にも、たとえば、 $\pi$  や  $e$  を小数展開したときに、使われる数の分布は一様になるかどうかを探究した。これは、normal という概念を使えば、 $\pi$  や  $e$  は normal といえるかという問題とも言える。mathematica の機能を使うと、簡単に100万桁までについてヒストグラム表示することができるし、10進展開以外に、2進展開や  $p$  進展開の場合についても調べることができる。 $\pi$  や  $e$  は、実験結果からは、normal であることが示唆されるし、身近にあるほとんどの無理数は normal であることが推測されるのだが、それらが normal であることは証明されていない。また、少し数学的な考察をすれば、無理数の中に normal でないものをいくらでも生成することがわかる。このような事例を蓄積し、教材化した。

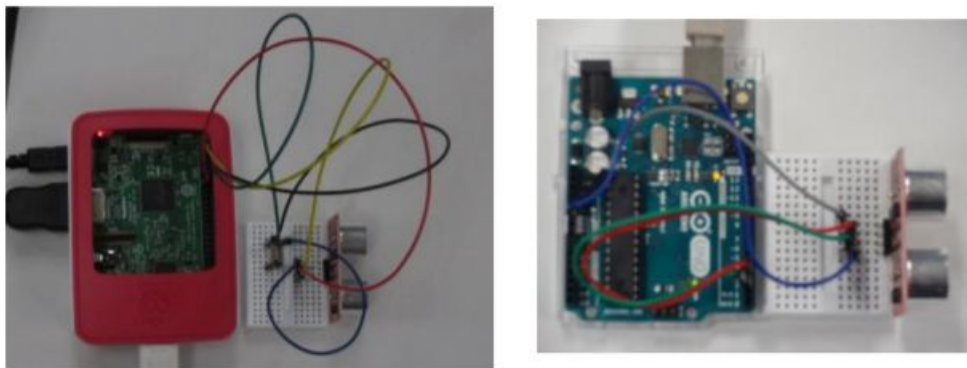
### (3) 距離センサによる測定実験についての数理的探究

非接触型のセンサ類を使うことで、以前とは比べ物にならないほど精度も高く、そして結果を可視化し、実験をやり直すことで、数理的探究のサイクルを短時間でも回すことができる。これを具体的な事例によって実感し、また高校生向けの教材開発をすることが、ここでのねらいであった。Vernier社の距離センサや分析ツールなどを使った実験では、たとえば、机の動摩擦と重力加速度が打ち消し合って等速度運動になるような場合について取り組む実験や、ピンポン玉あるいはスーパーボールを繰り返し跳ね返らす実験などについて大学生や院生が取り組む場合を分析し、高校生向けの教材開発を行った。



特に後者に関しては、上図のような実験装置を使うことで、右図のようなグラフを得ることができた。さまざまな問いをここから得ることができる。最も特徴的なのは、それぞれの放物線の頂点の軌跡で、グラフから二次関数になり、ある点に収束していくことが予想される。その点は繰り返し行われる跳ね返りが停止することを意味するが、そのような現象に関して、実験的にも、また数学的にも探究可能であることが明らかになった。

一方、別の事例として、超音波距離センサ HC-SR04 を Arduino やラズベリィパイに接続し、プログラミングを利用することによって、測定結果について調べた。



電子部品としての超音波距離センサとしての規格やプログラミングでの利用の仕方など、さまざまなリソースがあるけれども、それに沿って論理的に正しく作り上げたとしても、実際に必ずそうなるとは限らない。数学的探究であれば、論理的な推論などが問題になるが、部品あるいは接続の仕方に改善の余地があるのではないかと、プログラミングの書き方が、実際にはどういう動作として実装されているのかを調べるとか、適切でない現象が発生したときに、それをどういう問題として捉え、探究を次にすすめていくかということなど、数学的探究のときにはなかった要因について検討する必要が発生してくる。そのそれぞれの要因において誤差などが存在する。数学的探究では、そもそも誤差を考えなくていいケースが多いのだが、このような場面において誤差をなくすことに取り組むのではなく、誤差を生む最も大きな原因になっていそうなものを想定し、そこから取り組んでいくことが必要になる。このように、これまでに取り組んできた動的幾何ソフトやその他の数学用ソフトによる数学的現象への取り組みとは全く異なる側面があることが明らかになった。

しかし、多くの場合に共通することとして、測定値や観測結果などの事実を収集し、可視化して分析するところが数学用ソフトなどによって強化されているため、その事実を踏まえて次に何をすべきかを検討し、取り組んでいくサイクルそのものを回していくことが、改善されている。しかも、センサ類はかなり低価格化、高度化が進み、使いやすいプログラミング言語で扱うことができる。これらを教材化し、理数探究など高校の授業の中で扱える可能性が高まっていることが明らかになった。

#### (4) 距離センサを使った高校での授業実践

まず、(3)に示した距離センサを使った授業実践は、愛知教育大学附属高等学校において行った。2017年には、斜めにした机の上をティッシュの箱を滑らせた運動が、正の加速度運動になることや平坦な机の上では、摩擦により、負の加速度運動になることを実験した後、ティッシュの箱が等速度運動になるには、どんな角度だったらいいかを調べる実践を行った。2018年には、高校1年において繰り返し跳ね返る現象に関して、距離センサを使って分析し、たとえば、「いろいろな放物線が観察できるけれども、これらはよく似ている。それは相似なのか、合同なのか」という問いから探究を深めていく実践に取り組んだ。さらに翌年度においては、この現象の分析をさらに深め、数列として探究したときにどういう性質があるかを追究することを、高校2年生が取り組む実践を行った。その結果、センサや分析機器を使うことによって、実験をやり直したり、結果に基づいて探究を深めていく様子を確認することができた。

#### (5) 動的幾何ソフトを使った授業実践

動的幾何ソフト GC/html5 を使った実践は、中学校に関しては、愛知教育大学附属名古屋中学校、熊本大学附属中学校、宮崎県日向市立富島中学校、平岩小中学校などにおいて研究授業を行った。また、高等学校に関しては、愛知教育大学附属高等学校、埼玉県立熊谷西高等学校において研究授業を行った。

たとえば、熊谷西高等学校においては、2020年に、(1)で示した三角形の内角の和の誤差を出発点とする実践を行った。事実の存在から、問題を考えるべき必然性や、それに該当する事実の発見や、3種類のケースがどれくらいの割合で発生するかを、多くの試行によって推測するところまでは円滑に行えたが、それを数学的に定式化する過程には難点が残し、今後検討すべき課題になった。



たとえば、熊本大学附属中学校(2018)では、フェルマー点について、平岩小中学校(2019)では、ファニャーノの問題について、愛知教育大学附属名古屋中学校(2020)では、オイラー線の問題について扱った。これらの問題は、中学生が自力で簡単に解決できるわけではない。授業の中で、いくつかの鍵になるポイントに関して、生徒の話し合いや数学的活動として委ねるべきか、教員側から支援あるいは指示すべきか、その意思決定が授業としての成否に大きく影響する。また、それを念頭において設計する発問や、生徒に操作させるべき図の構成の仕方も大きく影響する。それを論点とした授業研究を中核とした、実践による検証をそれぞれ行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 飯島康之	4. 巻 32
2. 論文標題 テクノロジーを利用した数理的現象の探究の実際 距離センサを例として	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会研究会報告	6. 最初と最後の頁 71-76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsser.32.10_71">https://doi.org/10.14935/jsser.32.10_71</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 天羽康	4. 巻 32
2. 論文標題 ピンポン玉が繰り返しバウンドする現象の数理的探究について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会研究会報告	6. 最初と最後の頁 65-70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsser.32.10_65">https://doi.org/10.14935/jsser.32.10_65</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 飯島康之	4. 巻 60
2. 論文標題 GCを使った「学び合い」の授業のための教材研究の一例	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 イブシロン	6. 最初と最後の頁 7-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://hdl.handle.net/10424/00008538">http://hdl.handle.net/10424/00008538</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 飯島康之	4. 巻 31-8
2. 論文標題 「誤差」を生かした数学的探究の具体例	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本科学教育学会研究会研究報告	6. 最初と最後の頁 75-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsser.31.8_75">https://doi.org/10.14935/jsser.31.8_75</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 天羽 康・飯島康之	4. 巻 31-8
2. 論文標題 教具としての Raspberry Pi の可能性について 新科目「理数探究」に向けて	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本科学教育学会研究会研究報告	6. 最初と最後の頁 113-116
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsjer.31.8_113">https://doi.org/10.14935/jsjer.31.8_113</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 天羽 康	4. 巻 32-6
2. 論文標題 数学科での ICT 機器を活用した新科目「理数探究」に関わる授業実践 超音波距離センサを用いた活動を中心に	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 科学教育学会研究報告	6. 最初と最後の頁 17-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsjer.32.6_17">https://doi.org/10.14935/jsjer.32.6_17</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 飯島康之	4. 巻 59
2. 論文標題 ICTを利用した算数・数学での探究のサイクルについて-完全数などについての探究事例を手がかりに-	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 イブシロン	6. 最初と最後の頁 7-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://hdl.handle.net/10424/00007672">http://hdl.handle.net/10424/00007672</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 飯島康之・天羽康	4. 巻 45
2. 論文標題 ICTを利用した数学的探究の教材化を進めていくための基礎的考察 - mathematicaを使った数学的探究『は乱数なのか』を手がかりに-	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 研究紀要(愛知教育大学附属高等学校)	6. 最初と最後の頁 51-60
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://hdl.handle.net/10424/00008632">http://hdl.handle.net/10424/00008632</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 飯島康之	4. 巻 61
2. 論文標題 GC を使った数学的探究における事実と問いのダイナミズム - 対応表をもとに進める数学的探究に関する ケーススタディを基にして -	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 イブシロン	6. 最初と最後の頁 9-24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://hdl.handle.net/10424/00008557">http://hdl.handle.net/10424/00008557</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 天羽康	4. 巻 47
2. 論文標題 超音波距離センサを活用した「理数探究」向け教材の実践 - ボールが繰り返しパウンドする現象に潜む2次 関数の探究 -	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 研究紀要	6. 最初と最後の頁 53-60
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://hdl.handle.net/10424/00008668">http://hdl.handle.net/10424/00008668</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 飯島 康之	4. 巻 33
2. 論文標題 コンピュータによる数学実験を利用した数学的現象の探究の実際	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本科学教育学会研究会研究報告	6. 最初と最後の頁 67~72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14935/jsser.33.8_67">https://doi.org/10.14935/jsser.33.8_67</a>	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 授業で生徒が探究するための図の作り方の多様性
3. 学会等名 日本数学教育学会
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 思考を変えるための道具としてのテクノロジーを実感するための授業研究
3. 学会等名 日本科学教育学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 テクノロジーを利用した数学的探究と数理的探究について-Raspberry Pi でも可能になることに焦点をあてて -
3. 学会等名 日本数学教育学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 教育利用における数学用ツールソフトの二つの側面について- GC/html5を例として
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 天羽康
2. 発表標題 理数探究に向けた教材の開発 - 超音波距離センサを利用した数理的探究の複数の教材化 -
3. 学会等名 日本数学教育学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 数学的探究のサイクルの原動力としての数学ソフトウェアの役割 -ケーススタディを中心に -
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 有名な定理の証明の発見のためにgc/html5を使った授業の実際 - 九点円・オイラー線・フェルマー点 -
3. 学会等名 rims共同研究(公開型):数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 飯島康之
2. 発表標題 i{ctを使った生徒の学びの様子を把握するための試み
3. 学会等名 日本科学教育学会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

GC Resource Center <a href="http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/index.htm">http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/index.htm</a> 図形を動かして問題発見 <a href="http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/JSME2018_problems.htm">http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/JSME2018_problems.htm</a> GC Resource Center <a href="http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/index.htm">www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/index.htm</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----