

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 5 月 1 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K00968

研究課題名(和文) プリフォーマルな表現間の対応付けに着目した数学的問題解決指導に関わる基礎的研究

研究課題名(英文) A fundamental study on teaching throught mathematical problem solving focusing on corresponding between pre-formal representations

研究代表者

山田 篤史 (YAMADA, Atsushi)

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：20273823

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、算数・数学の授業で導入される様々なプリフォーマルな数学的表現(児童生徒独自の表現と正式な表現の意味論的媒介を果たす表現)についての理解や問題解決的な授業におけるそれらの役割について明らかにすると共に、その知見を踏まえたそうした表現の指導の在り方について検討することを目的としている。

結果として、「全体に対する部分の割合」を表すテープ図の類に関する理解が低い可能性がある一方、同種の図でも、加減の相互関係を表す図に関しては未習児でも解釈できる可能性が高いことが指摘された。さらに、そうした図の導入の授業をデザインする際には、図の機能的役割に関する合意が重要であることが指摘された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

部分-全体関係を表すテープ図に類するプリフォーマルな表現は、加減の相互関係が未習の児童でも、一定程度解釈し使用することができるようであることを調査によって確かめた。その結果は、そうした調査の少なさからも学術的意義があると考えられる。その結果を踏まえると、そうした図を授業で教師側から導入することも可能だと考えられるが、一方では、関係を表現するというそれらの図の機能的役割についての合意が無い場合、児童は別の目的を持つインフォーマルな図に留まってしまうということを授業分析から指摘もしている。その指摘は授業デザインに対しては重要な示唆であるため、社会的な意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：The purposes of this study were to clarify the students' understanding for various pre-formal mathematical representations(representations that support the meaning of formal representations based on students' own informal representations) introduced in arithmetic and mathematics classroom and their roles in problem-solving classes, and to examines the way of teaching for the representations based on the findings.

The results were as follows: It is possible that the understanding of the kind of tape diagram that represents the "ratio of the part to the whole" is low because of the low frequency of the appearance in the context of learning of proportion, while even the children who have not learned the mutual relationship between addition and subtraction are likely to be able to interpret the same type of diagram. Furthermore, it was pointed out that it is important to agree on the functional roles of the diagrams when designing lessons for introducing such diagrams.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的問題解決 プリフォーマルな表現

## 1. 研究開始当初の背景

我が国の算数・数学教育では、「表現力の育成」が叫ばれているが、この分野の研究では、式やグラフなどのフォーマルな数学的表現や説明する活動における自然言語の表現に関心が集中する傾向にある。しかし、数学的問題解決では、式やグラフだけが表現として介在するわけではないし、自然言語のみに着目すればよいわけでもない。例えば、児童生徒が問題解決に取り組む際、最初からフォーマルな数学的表現を構成できるとは限らない。そもそも、算数・数学の問題解決的な指導では、学習者は、未習内容を含む問題に対して最初から問題構造を完璧に反映した式表現や言語表現(教師が最終形として望むフォーマルな数学的表現)を構成できることが期待されているわけではない。問題解決的指導の下で「表現力の育成」を図ろうとする場合、現実的には、学習者が独自に構成するインフォーマルな表現を出発点とし、如何にそれらをフォーマルな数学的表現へと繋げて、問題解決の進展を図っていくかが重要なプロセスになるはずなのである。

ところが、現実的な授業場面では、学習者が独自に構成するインフォーマルな表現を出発点とする場合、それらを教師が最終形として望むフォーマルな数学的表現へと「直接」結びつけることは難しいことが多く、両者を媒介する様々な中間的表現を用いるのが通常である。こうした「児童生徒のインフォーマルな表現に基盤を置くが、より大きな数学的構造を提供しつつ、フォーマルな表現を意味論的に支える媒介的な表現」は、プリフォーマル(Pre-Formal)な表現と呼ばれることがある(例えば、Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008)。例えば、割合指導で頻繁に登場する比例数直線などは、その典型であろう。

ところが、そうした算数・数学教育の授業において導入・使用されるプリフォーマルな表現にも様々なものがある。例えば、算数・数学の問題解決的な授業で、児童生徒が各自の問題解決の仕方を、教師や教科書が提示するプリフォーマルな表現を使って説明する場合、複数の児童生徒が異なるプリフォーマルな表現で説明すると(例えば、分数の加減文章題の解決場面で、ある児童はテープ図、別の児童はパイチャートを使って説明した場合など)、説明に現れる表現間の対応関係をクラス全体で共有できていないときには、容易に議論に混乱が生ずることになる。しかも、そうした授業で、最終的に「まとめ」として残るものが式表現だけであった場合、その式表現も多様な表現による意味づけに支えられていないが故に、理解は弱いままである可能性も高いのである。

結局、算数・数学教育の授業では、「表現力の育成」を目的として様々なプリフォーマルな表現が導入され、教科書にもその種の表現が数多く紹介されるようになったが、それらの表現間の相互変換や対応付けに対する児童生徒の理解の実態は明らかではないし、それらが問題解決的な授業の進展に果たす役割も十分明らかにはなっていないのが現状であったのである。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、算数・数学の問題解決的な指導において導入される様々なプリフォーマルな数学的表現(児童生徒のインフォーマルな表現に基盤を置くが、より大きな数学的構造を提供し、フォーマルな表現を意味論的に支える媒介的な表現)に焦点を当て、そうした幾つかの表現間の対応付けや相互変換に関わる児童生徒の理解の実態と、それらの表現間の対応付けが問題解決的な授業の進展に果たす役割を分析的に明らかにすると共に、それらの分析的知見を踏まえた算数・数学の問題解決的な指導の在り方について検討することである。

## 3. 研究の方法

算数・数学の問題解決的な指導において導入されるプリフォーマルな数学的表現に関する導入の実態や児童生徒の理解の実態を明らかにすることについては、国内外の文献、各種学力調査、指導事例集、商業誌の授業記録、教科書などを共同研究者とレビューし、事例を収集していくことにする。さらに、そうしたレビューから、幾つかのプリフォーマルな数学的表現あるいは指導内容に焦点を当てて、それらの表現についての児童生徒の理解の実態を調査する。また、それらの表現が問題解決的な授業の進展に果たす役割については、具体的な授業を分析することにより明らかにしていく。さらに、そうした知見を基に、それらの表現を介在させた算数・数学の問題解決的な指導の在り方について、検討を加えていく。

## 4. 研究成果

(1) 平成 29 年度は、主として文献レビューを行い、算数における割合問題の困難性に焦点を当てた。割合概念の表現の中でも、とりわけ、平成 28 年度全国学力・学習状況調査算数 A 問題 8 番で問われた「全体に対する部分の割合」を表す様々な表現とそれらの対応付けの理解について議論した。

文献レビューと児童の算数学習の履歴を考察する限り、全体に対する部分の割合を表す単独のテープ図に類した図の登場頻度は非常に低いことが推測され、そうした図の一種である帯グラフの正式な学習以後でも、そうした図を使った割合比較は、児童にとって馴染みのないプリフォーマルな表現を使った活動にしかならない可能性が高い(それ故、部分の大きさだけにしか着目できない)というのが結論であった。

また、そうした図の理解を支えるインフォーマルな表現にはどのようなものがあり、児童はど

のようなインフォーマルな表現を基盤にして全体に対する部分の割合を表すテープ図のようなプリフォーマルな表現を理解・解釈できるようになるのかについて、レビューで見いだされた活動を利用して、その指導の道筋を提案するなどの考察も行った。

なお、これらの成果は、「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕の1番目『イプシロン』誌59巻に掲載された論文にまとめられている。

(2) 平成30年度は、前年度の「全体に対する部分の割合」から考察対象を変えて、加減の相互関係を中心に検討した。というのも、「全体に対する部分の割合」に対する典型的なプリフォーマルな表現として2つに区切られたテープ図があるが、これに非常に類似した図が、加減の相互関係(部分-全体関係)を表す図として、教科書に頻繁に登場するからである。

そこで、加減の相互関係(加減逆思考問題の解法)が未習の児童に、加減逆思考問題を提示し、図でその考え方を説明するよう求めた場合の児童の反応と、部分-全体関係を表現するプリフォーマルな表現(テープ図)に文章題中の3つの数量を書き込ませた場合の児童の反応について調査し、加減の相互関係に関わるプリフォーマルな表現とフォーマルな表現(数式)の対応関係に関する児童の認識について調査することにした。また、加減の相互関係(部分-全体関係)の指導に関わって議論を行った。

調査結果に関しては、調査の文章題が 図(まるず)等のプリフォーマルな表現を使った説明等によって解決できるのであれば、部分-全体関係を表現するテープ図(抽象的なプリフォーマルな表現)の指導やその図を問題場面に沿って解釈するような指導には大きな困難は無いだろうというものであった。実際、加減の相互関係の指導の前に、部分-全体関係を表現するテープ図を数図ブロックの操作の手続き図から抽象させる紙面を用意する教科書もあり、調査結果は、その種の指導の重要性和妥当性を示唆するものだった。また、(答えを出すための式を記述することより、問題場面に沿って数量を式に記述していくような)場面記述型の思考が問題場面の理解を強固にする可能性も示唆された。

なお、これらの成果は、「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕の2番目『イプシロン』誌60巻に掲載された論文にまとめられている。

(3) 平成31年度は、加減の相互関係を題材に、その指導に先立って行われる加法構造の部分-全体関係を示すプリフォーマルな図的表現の導入の授業を分析し、問題解決的な授業において教師側がプリフォーマルな図を導入する際の注意点を指摘すると共に、そこでの分析的知見を踏まえた算数・数学の問題解決的な指導の在り方について検討した。

授業分析から、加法の手続きを表現するための手続き図に類する図から加法の相互関係を説明するためのプリフォーマルな概念図(テープ図)への抽象化、及び後者の図と式との対応付けは、比較的スムーズに進行する(教師からの図の導入であっても、図と式の対応関係に対する解釈が得られれば授業における問題解決は進行する)ものの、最終的なテープ図のクラス全体での承認は得られにくい場合がある、ということが明らかになった。当該授業におけるその不承認の原因は、図が何を説明しようとしており(説明対象)、その導入の目的は何なのか(図の機能)に対する児童と教師の認識の齟齬にあり、その意味で、加法の相互関係を説明するためのプリフォーマルな図を導入しようとする授業デザインでは、図の導入の前に、「加減の問題場面の一般的な数量関係を表現するための汎用的な図を考える」という図の導入の機能的目的を共有しておくことがポイントであることが示唆された。

なお、これらの成果は、「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕の3番目『イプシロン』誌61巻に掲載された論文にまとめられている。

#### 引用文献

Webb, D.C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 山田篤史	4. 巻 59
2. 論文標題 表現研究の立場からみた「全体に対する部分の割合」の指導に関する一考察	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 19-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 山田篤史	4. 巻 60
2. 論文標題 加減逆思考問題における児童の解答とプリフォーマルな表現によるその指導の方向性	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 17-24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 山田篤史・清水紀宏	4. 巻 61
2. 論文標題 加法構造における部分-全体関係を表すプリフォーマルな表現の導入指導に関わる注意点	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 25-34
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	清水 紀宏  (SHIMIZU Norihiro)  (50284451)	福岡教育大学・教育学部・教授    (17101)	