

令和 2 年 7 月 13 日現在

機関番号：17101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K00979

研究課題名(和文) 中学校数学科「関数」領域における課題探究型の説明学習に関する実証的研究

研究課題名(英文) Empirical study on the teaching and learning of explorative proving in function area of junior high school mathematics

研究代表者

岩田 耕司 (IWATA, Koji)

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90437541

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、中学校数学科の領域「関数」における「説明すること」を「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と規定し、理論的に検討・設定した水準の移行過程を、生徒の実態や現行のカリキュラムに沿って具現化した。また、授業実践を通して、説明を構成すること(C)の水準の移行を意図した授業や、説明を構想すること(P)の水準の移行を意図した授業において有効な手立てを特定した。一方で、よい説明に対する規準を生徒から引き出すための手立てや、特に二乗に比例する関数を対象とした説明の構成において関数判断の根拠をどのように指導するかについては更なる検討が必要であることも明らかとなった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

中学校数学科の領域「関数」における学習状況は他の領域と比べ望ましくなく、学習状況の改善が急務である。また、平成20年に告示された中学校学習指導要領では、指導すべき数学的活動の一つに「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」が位置付けられたが、関数指導に関する研究では、説明や言語の力に着目し、言語の視点から指導の改善を試みる研究はあまり見られない。本研究で具現化した水準の移行過程や、授業実践を通して明らかとなった手立ては、通常の授業で無理なく実践できるものであり、領域「関数」の学習状況の改善に資するものと考えている。

研究成果の概要(英文)：In this study, I defined the “proving” in function area of junior high school mathematics as “justifying the prediction or interpretation produced by using functions”, and embodied the transition process of the levels and course of its learning along the actual condition of the students and current curricula. In addition, through teaching practice, I identified effective means in the class that aimed at the transition of the levels of proving. On the other hand, it became clear that further examination was necessary how to teach the grounds of the judgment for the functions to be proportional to square, and how to draw a criterion for the good proofs from students.

研究分野：数学教育学

キーワード：関数 証明 説明 数学的モデル化 中学校数学

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

#### (1) 教育に関する認識

研究開始当初の状況として、中学校数学科の四領域(数と式、図形、関数、資料の活用)の中でも特に、領域「関数」における学習状況は他の領域と比べ望ましくなく、学習状況の改善が急務であることが指摘されていた(例えば、国立教育政策研究所, 2016)。平成20年に告示された中学校学習指導要領では、数学的活動をより一層充実し、言語活動や体験活動を重視した指導が行われるよう、各学年の内容に指導すべき数学的活動が例示され、その一つに「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」が挙げられた(文部科学省, 2008)。しかしながら、中学校数学科の四領域で比較すると、領域「数と式」や「図形」では「文字式による説明」や「図形の性質の証明」といった、数学で求められる望ましい説明の姿が典型的に存在するが、領域「関数」や「資料の活用」ではそのような望ましい説明の姿が明確に存在しているわけではない。それゆえ、授業においてどのような説明を子どもに求めるか、求めないかは、各教師の判断に委ねられており、説明を取り入れることによる指導の効果が十分に得られていないと考えた。

#### (2) 研究に関する認識

研究開始当時の数学教育学研究においては、学校数学における「課題探究型の説明学習」の必要性が国際的にも認知され始めており(宮崎・藤田, 2013)、課題探究型の説明を取り入れることによって数学の学習状況の改善を図る試みが国内外で行われていた。しかしながら、関数指導に関する研究では、比例概念や表・式・グラフの関連など、関数概念がどのように発達するかに関心を当てた研究や、数学的モデル化に関する教材開発などは数多くなされているものの、課題探究型の説明や言語の力に着目し、言語の視点から指導の改善を試みる研究はあまり見られなかった。そのような認識のもと、研究代表者は、本研究課題を申請する前の段階で、中学校数学科「関数」領域における説明を捉える枠組みを開発し、その枠組みを水準化することで、中学校数学科の領域「関数」における説明学習の水準の移行過程を理論的に検討・設定していた。しかしながら、その水準の移行過程はあくまでも理論的に検討・設定したものであり、授業実践等による実証的な検討が必要であると考えた。

### 2. 研究の目的

以上のような認識のもとに本研究では、主に次の3つの研究課題に取り組むことを通して、中学校数学科の領域「関数」における課題探究型の説明学習の学習水準の移行過程を実証的に検討することを目的とした。

研究課題1: 学習水準の移行過程に基づき意図される学習活動を、実際の授業として具現化し、学年ごとの指導の系列として組織化する。

研究課題2: 授業実践を通して、意図される学習活動の達成状況を把握するとともに、各授業や学年ごとの指導の系列の精緻化を図る。

研究課題3: 開発した指導の系列や授業実践を総括し、水準の移行に効果的な指導方法や検討課題を特定する。

### 3. 研究の方法

本研究の方法は、大きく「文献解釈的手法」と「授業実践による質的調査」の2つに分けることができる。

#### (1) 文献解釈的手法

中学校数学科の検定済み教科書の記述内容を分析することで、領域「関数」における課題探究型の説明学習の現状を把握する。さらには、授業実践の対象となる学習内容について、中学校数学科の検定済み教科書や教師用指導書、その他関連する文献・資料等を用いて検討し、授業実践の計画を立案する。

#### (2) 授業実践による質的調査

中学校第1学年から第3学年までのそれぞれの学年において、学習水準の移行過程に基づき意図される学習活動を、実際の授業として具現化し、指導の系列として組織化するとともに、授業実践を通してそれらの達成状況を検証する。具体的には、対象となる水準の移行を可能にするための教材や授業展開を検討・開発し、授業実践を通して、VTRによって記録され、プロトコルに起こされた授業の様子や、授業後に回収した生徒のワークシートの記述を分析することで、意図される学習活動の達成状況を把握するとともに、各授業や指導の系列の精緻化を図る。

### 4. 研究成果

本研究の主要な成果は、以下の諸点である。

#### (1) 学習水準の移行過程に基づき意図される学習活動の具現化

関数指導の一つの大きなねらいは、関数的な見方や考え方を養うことであり、本研究では、このような関数指導の意義に鑑み、領域「関数」における説明の対象としての「事柄」や「事柄の生成」を、「関数の性質に関する命題を予想すること」だけでなく、「具体的な事象に関する観察や実験の結果を関数とみなすことによって未知の状況を予測したり、事象を解釈したりすること」も含めて捉える。その上で、特に本研究では後者に焦点を当て、本研究で考察の対象とする「説明すること」を「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と規定する。また、数学の証明において、推論の過程の適切さが検証の対象であることと同様に、予

測や解釈の正当化に関しても、その結論を導くまでの過程が適切かどうかの検証が必要不可欠である。さらに、そのような関数を活用して予測したり、解釈したりする過程は一般に数学的モデル化の過程とみることができる。それゆえ本研究では、領域「関数」における「説明」の要件を数学的モデル化の主要な過程である定式化 (formulate), 運用 (employ), 解釈 (interpret) という3つの過程 (例えば, OECD, 2013) から具体化し、次のようにレベル化して捉える。

#### 定式化 (formulate) の正当化

- F1. 課題解決に用いる関数を示す。
- F2. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、数学的根拠に基づいて示す。
- F3. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、理想化・単純化等に言及し、数学的根拠に基づいて示す。

#### 運用 (employ) の正当化

- E1. データから数学的結果を導く数学的処理の過程を記述する。
- E2. データから数学的結果を導く数学的処理の過程を、用いた数学的モデルを明示して記述する。

#### 解釈 (interpret) の正当化

- I1. 数学的結果を解釈した結果を示す。
- I2. 数学的結果を解釈した結果を示すとともに、解釈した結果には制約が伴うこととその要因について記述する。

中学校数学科の領域「関数」において目標となる説明は、定式化 (F), 運用 (E), 解釈 (I) それぞれについて、上述の F3, E2, I2 の要件を同時に満たす説明 (以後、(F3; E2; I2) レベルの説明のように略記) である。しかしながら、このような説明を生徒がすぐに構成できるようになるとは考え難く、その学習には相当の困難が伴うことが予想される。それゆえ、このレベルに至るまでの段階を意図的に仕組む必要があり、本研究ではその段階を次の3つの段階で捉える。

- C1: 説明の「骨格」を学ぶ段階で、(F1; E1; I1) レベルの説明を構成することを意図する段階。
- C2: 学んだ説明の「骨格」に肉付けしていく段階で、主として数学的根拠の質を高めることを意図し、(F2; E2; I1) レベルの説明を構成することを意図する段階。
- C3: C2 レベルに加え、主として理想化・単純化の視点から記述の質を高めることを意図し、(F3; E2; I2) レベルの説明を構成することを意図する段階。

また、説明を自律的に構成できるようになるためには、説明の構成の学習だけではなく、説明を構想する学習も必要となる。そのような、説明の構想の学習レベルとして、上述の C1, C2, C3 の学習レベルそれぞれに対応する形で以下の3つの学習レベルを設定する。

- P1: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の各過程を視点として探る。
- P2: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の各過程における正当化の要件を視点として探る。
- P3: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の過程を視点として探る。

以上のような、説明の構成 (C) と構想 (P) の段階を組合せることにより、中学校数学科の領域「関数」における説明学習の水準の移行過程は図1のように設定される。さらに、その移行過程と、各学年の学習内容とを対応させたものが表1の「内容 - 活動対応表」である。

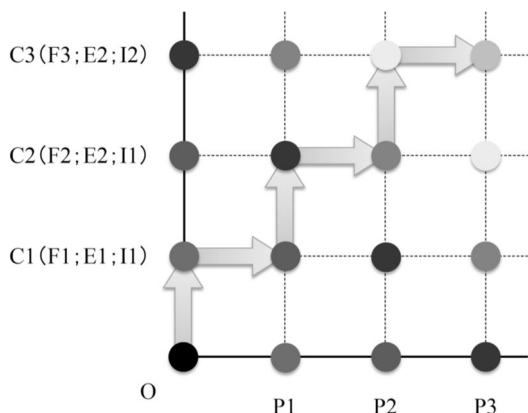


図1. 中学校数学科の領域「関数」における説明学習の水準の移行過程

表1. 領域「関数」の「内容 - 活動対応表」

学年	項目	学習レベル・移行
小学校 第6学年	比例の関係をを用いて問題を解決すること	O C1
中学校 第1学年	比例, 反比例を用いて具体的な事象をとらえ説明すること	C1 (P1, C1)
		(P1, C1) (P1, C2) (P1, C2) (P2, C2)
中学校 第2学年	一次関数を用いて具体的な事象をとらえ説明すること	(P2, C2) (P2, C3)
		(P2, C3) (P3, C3)
中学校 第3学年	関数 $y = ax^2$ を用いて具体的な事象をとらえ説明すること	(P3, C3)

### 中学校第1学年「比例，反比例」における学習活動の具現化

水準の移行過程としては，表1に示すように，理想的には，小学校第6学年で学習レベルC1を達成していることが求められる。しかしながら，研究協力者である複数の中学校数学科教員との協議を通して，中学校第1学年であってもC1レベルの説明を記述できる生徒は極めて少ない現状があることを重視し，学習活動の具体化に当たっては，当初，説明の構成の学習レベルを0からC1へと引き上げる段階と，C1からC2へと引き上げる段階とに分けて計画することを検討した。しかしながら，中学校第1学年ですでに比例（反比例）であることを判断する根拠（F2の要件）や，数学的モデルとしての比例（反比例）の式（E2の要件）を学習していることから，C2レベルの学習の中で，C1レベルの学習を同時に行うことも可能との結論に至った。それゆえ，本研究では，中学校第1学年「比例，反比例」における学習水準の移行過程に基づき意図される学習活動を，0から（0，C2）への移行を図る段階と（0，C2）から（P2，C2）への移行を図る段階との2段階に分け，次のような「反比例」を題材とする授業として組織化した。

#### 【1時間目】（0（0，C2））の概要

（問題）温めの目安が500Wで4分0秒，1000Wで2分0秒，1500Wで1分20秒のお弁当がある。800Wの電子レンジでは，何分何秒温めればよいか。

（めあて）800Wのレンジでの温め時間を予想し，その予想が正しいことを簡潔に説明しよう。

（まとめ）予想が正しいことの説明には，次の3つ（利用した関数とその根拠，関数の式とその使い方，予想）が必要である。

#### 【2時間目】（（0，C2）（P2，C2））の概要

（問題）あるナースウォッチでは，20回の脈拍にかかる時間から1分間の脈拍数を予想できる。例えば，20回の脈拍にかかる時間が15秒のとき1分間の脈拍数は80回，20秒ならば60回と予想できる。20回の脈拍にかかる時間が24秒のとき，1分間の脈拍数は何回と予想できるか。

（めあて）1分間の脈拍数を予想し，3つの視点を使って予想が正しいことの説明を作ろう。

（まとめ）3つの視点を使うと簡潔で分かりやすい説明を作ることができる。

### 中学校第2学年「一次関数」における学習活動の具現化

中学校第2学年では，理想的には（P2，C2）から（P2，C3）への移行を図る段階と，（P2，C3）から（P3，C3）への移行を図る段階の2つの段階を設定することが求められる。しかしながら，研究協力者である中学校数学科教員との協議を通して，C3レベルの説明を構成する際の前提条件として，事象を理想化・単純化することによって2つの数量の関係を一次関数とみなし，未知の状況を予測したり，事象を解釈したりする活動自体が適切に設定されている必要があり，授業時数との兼ね合いから，第2学年では特に（P2，C2）から（P2，C3）への移行を図る段階に焦点を当てて具体化を行うこととした。具体的には中学校第2学年「一次関数」における学習水準の移行過程（（P2，C2）（P2，C3））に基づき意図される学習活動を，本研究では次のような「富士山の気温」を題材とする一連の授業として具現化した。

#### 【1時間目】の概要

（問題）里奈さんたちは8月に富士山の6合目（2500m）まで登る計画を立てている。富士山の山頂や麓には観測所があるが，6合目には観測所がなく，気温が分からない。6合目の気温はどのように調べたらよいだろうか。

（めあて）標高と気温の関係を調べ，6合目の気温を予想する方法を考えよう。

（まとめ）点がほぼ直線上にあることから，気温は標高の一次関数とみることができる。

#### 【2時間目】の概要

（問題）1時間目と同様。

（めあて）気温を標高の一次関数とみなし，河口湖と富士山頂のデータから6合目の気温を予想しよう。

（まとめ）一次関数とみなすと，グラフや式を使って6合目の気温が予想できる。

#### 【3時間目】（（P2，C2）（P2，C3））の概要

（問題）里奈さんたちに6合目の気温を求める方法を教えてあげたい。どのように説明すればよいだろうか。

（めあて）里奈さんたちに6合目の気温の求め方を説明しよう。

（まとめ）説明には，次の4つが必要である：利用した関数とその根拠，みなした理由，関数の式とその使い方，予想。

### 中学校第3学年「関数 $y = ax^2$ 」における学習活動の具現化

水準の移行過程としては，表1に示すように，理想的には，第2学年で学習レベル（P3，C3）を達成していることが求められる。しかしながら，前述のように，本研究では第2学年での学習活動を，（P2，C2）から（P2，C3）への移行を図る段階に焦点化して具体化した。それゆえ，本研究では，（P2，C3）から（P3，C3）への移行を図る段階を，第3学年「関数  $y = ax^2$ 」において設定し，その移行過程に基づき意図される学習活動を，次のような「自動車の停止距離」を題材とする一連の授業として具現化した。「自動車の停止距離」を題材に選んだ理由は，一つの題材の中で比例および二乗に比例する関数を同時に扱うことができ，説明の構成に関する既習の確認と新たな学習とを連続的に展開できると考えたからである。

#### 【1時間目】

（問題）右のグラフ（略）は，ある自動車をいろいろな速さで走らせ，急ブレーキをかけたと

きの空走距離，制動距離を測定した実験の結果である。時速 80km のときの空走距離と制動距離はそれぞれ何 m だろうか。

(めあて) 時速との関係を調べ，距離を予想しよう。

(まとめ) 空走距離は速さに比例し，制動距離は速さの 2 乗に比例するとみることができる。

【2 時間目】((P2, C3) (P3, C3)) の概要

(問題) 1 時間目と同様。

(めあて) 空走距離と制動距離の予想の仕方を説明しよう。

(まとめ) 数学化の過程を意識して説明をつくるとよい。

(2) 授業実践による検証

授業実践を通して明らかになった事柄は次の点である。まず，説明を構成すること (C) の水準の移行を意図した授業においては，発見の文脈と正当化の文脈を明確に切り分けて指導することの重要性が確認された。予想すること (発見の文脈) と説明を構成すること (正当化の文脈) を同時に行うことは生徒に対する負荷が大きく，自分の予想が正しいのかわかるといって説明を書くことに集中できない生徒の姿も見られた。それゆえ，説明を構成する学習の前に予想の仕方を学ぶ学習を設定し，予想の正しさのある程度保証した段階で，説明を書く学習に取り組みさせる方がよいことが分かった。

また，説明を構想すること (P) の水準の移行を意図した授業においては，その前の段階で構成した説明に必要な要素 (例えば，C2 であれば「用いた関数とその数学的根拠」，「数学的モデルとその用い方」，「予測した結果」) を視点とし，説明を構想することが，自律的に説明を構成するための一つの有効な手立てになることが分かった。

一方で，次のような課題も浮き彫りになった。一つは，説明の規範を指導する際に，どのような説明がよい説明であるか，よい説明に対する規準を生徒から引き出すための手立てがないことである。また，特に二乗に比例する関数を対象とした説明の構成について，関数判断の根拠の指導についての更なる検討が必要であることも明らかとなった。現行のカリキュラムでは，中学校第 1 学年もしくは第 2 学年で，具体的な事象の中から観察や操作，実験などによって取り出した二つの数量について，事象を理想化したり単純化したりすることによって，それらの関係を比例や一次関数とみなし，そのことを根拠として変化や対応の様子を考察したり予測したりすることを学ぶ。一方で，反比例や  $y=ax^2$  など，関数のグラフが曲線になるものについての取り扱いが難しく，その判断の根拠については教科書で取り扱われていない。例えば， $x$  と  $y$  の値の組を座標平面上に表したグラフが直線になることや，変化の割合が一次関数になることなど，2 つの数量の関係が二乗に比例する関数であると判断する際の根拠をどのようにカリキュラムに位置付け，指導していけばよいかについて更に検討を深める必要がある。

(3) 研究の総括と今後の課題

本研究では，中学校数学科の領域「関数」における「説明すること」を「関数を活用して予測したり，解釈したりした結果を正当化すること」と規定し，その正当化に必要な条件 (説明の要件) を水準化することで理論的に設定した水準の移行過程を，実際の授業として具現化することや，授業実践を通して水準の移行に効果的な指導方法や検討課題を特定することを目的としていた。各学年における学習活動の具体化に当たっては，研究協力者である中学校数学科教員との協議を通して，意図する学習レベルの位置付けの変更を伴いながら，一定程度，生徒の実態や現行のカリキュラムに沿った形で具体化することができた。また，授業実践を通して，説明を構成すること (C) の水準の移行を意図した授業においては，発見の文脈と正当化の文脈を明確に切り分けて指導することや，説明を構想すること (P) の水準の移行を意図した授業においては，説明に必要な要素を視点として説明を構想することなどが有効な手立てとなることが分かった。

一方で，よい説明に対する規準を生徒から引き出すための手立てや，特に二乗に比例する関数を対象とした説明の構成において，関数判断の根拠をどのように指導するかについては更なる検討が必要であることも明らかとなった。これは，領域「関数」の学習における「説明」を，連続的，構造的な学びとして具現化するためには，説明の対象を「関数を活用して予測したり，解釈したりした結果の正当化」だけでなく，「関数の性質に関する命題やその正当化」を含む形で拡張する必要があることを示唆している。

今後は，これらの結果を受け，中学校数学科の領域「関数」における説明を捉えるための枠組みを拡張し，連続的，構造的な学びとして再構成することが重要な課題であると考えている。

[引用・参考文献]

- 国立教育政策研究所 (2016). 『平成 28 年度 全国学力・学習状況調査報告書 中学校数学』. Retrieved from <https://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/data/16mmath.pdf>
- 宮崎樹夫・藤田太郎 (2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 我が国の中学校数学科における必要性和，これまでの成果 - . 日本数学教育学会 『第 1 回春期研究大会論文集』, pp. 1-8 .
- 三輪辰郎 (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察 . 『筑波数学教育研究』, 第 2 号, pp. 117-125 .
- 文部科学省 . (2008). 『中学校学習指導要領解説数学編』, 教育出版 .
- OECD (2013). PISA 2015 draft mathematics framework. Retrieved from [http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft\\_PISA\\_2015\\_Mathematics\\_Framework.pdf](http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft_PISA_2015_Mathematics_Framework.pdf)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 岩田耕司	4. 巻 -
2. 論文標題 新しい教育課程における数学的プロセスの位置付け - 領域「関数」における統合的に考えることに着目して -	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会『第6回春期研究大会論文集』	6. 最初と最後の頁 193-196
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岩田耕司, 永海哲広, 原島裕美	4. 巻 -
2. 論文標題 領域「関数」における課題探究として証明することの授業化 - 第1学年の単元「比例と反比例」 -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本科学教育学会『第41回年会論文集』	6. 最初と最後の頁 41-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岩田耕司	4. 巻 -
2. 論文標題 数学的プロセスからみた教育課程の特徴付け - 領域「関数」に焦点を当てて -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本数学教育学会『第5回春期研究大会論文集』	6. 最初と最後の頁 145-148
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 岩田耕司
2. 発表標題 新しい教育課程における数学的プロセスの位置付け - 領域「関数」における統合的に考えることに着目して -
3. 学会等名 日本数学教育学会第6回春期研究大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩田耕司, 永海哲広, 原島裕美
2. 発表標題 領域「関数」における課題探究として証明することの授業化 - 第1学年の単元「比例と反比例」 -
3. 学会等名 日本科学教育学会第41回年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岩田耕司
2. 発表標題 数学的プロセスからみた教育課程の特徴付け - 領域「関数」に焦点を当てて -
3. 学会等名 日本数学教育学会第5回春期研究大会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考