

令和 2 年 7 月 11 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K01272

研究課題名(和文) 新時代の線形計画問題に対する高速アルゴリズムの開発

研究課題名(英文) The development of fast algorithm for solving linear programming started a new age

研究代表者

施 建明 (Shi, Jianming)

東京理科大学・経営学部ビジネスエコノミクス学科・教授

研究者番号：70287465

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：ボックス制約の線形計画問題に対して、ボックス制約の頂点に対応する「面」をなどのようにアルゴリズムの設計をした。Wolfeの最小ノルム点を求めるアルゴリズムをZonotopeの上で利用しないで、最適解を求めることができた。

計算機実験により、本研究のアルゴリズムはLP-Newton法と比較した。次元=1000、制約の個数=150の場合、LP-Newton法は34.3(秒)に対して、提案手法は5.9(秒)でした。Newton stepsの利用は平均で4.0回から2.0回まで下がった。提案手法は計算速度の面で、優位であることが観測されたことは言えると思われる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

LP問題はある種の計算幾何学の問題に帰着でき、既存の変換よりさらに高速のアルゴリズムの開発を今後期待できる。本研究では、LP-Newton法の改良法の一例を示したが、今後も大きな改良を行われ、線形計画のさらなる発展につなげたい。

今まで以上にデータ分析を必要とする新時代に、かつてない高速なアルゴリズムは人工知能、機械学習などの分野に広く利用され、大きな意義がある。また、線形計画問題に対する強多項式のアルゴリズムの開発に少しでも刺激を与えて、多くの若い研究者が参入し、線形計画の分野に革新をもたらす頂けると、データサイエンスや人工知能、数値計算などの周辺分野の発展に寄与することになる。

研究成果の概要(英文)： For solving a linear programming problem with box constraints, we designed the algorithm so that the "faces" corresponding to the vertices of the box constraint. This algorithm is able to find an optimal solution without using Wolfe's algorithm for finding the minimum norm on a Zonotope.

The algorithm in this study was compared with the LP-Newton method by numerical experiments. When the dimension is 1000 and the number of constraints is 150, the CPU time to find a optimal solution by LP-Newton method is 34.3 seconds and while it is 5.9 seconds by the proposed method. The number of using the Newton steps dropped from 4.0 to 2.0 on average. We believe that the proposed method was observed to be superior in terms of calculation speed.

研究分野：数理工学

キーワード：線形計画 LP-Newton法 強多項式のアルゴリズム 平面回転

1. 研究開始当初の背景

線形計画法(LP)とは与えられた行列 $A \in R^{m \times n}$ とベクトルベクトル $b \in R^m$ と $c \in R^n$ に対して、 $\min\{c^T x \mid Ax \leq b \text{ and } x \geq 0\}$ を求める問題である。

LP 問題は、G.B. Dantzig による単体法の発展により大きく成長し、様々な分野に影響を与えている。しかし、LP 問題において、制約条件の係数行列の数値の長さには依存せず、その行列の行数(m) と列数(n) のみに依存する強多項式時間アルゴリズムは発見されていない。近年、Fujishige らによる効率的アルゴリズムとして LP-Newton 法が提案され、他の研究者による改良を始め、LP 問題の強多項式時間アルゴリズムの開発に向けて、理論的な研究が活発に行われている。本研究は LP 問題に対する強多項式時間のアルゴリズムを目指して、理論的にも実用的にも、これまでよりもはるかに効率的なアルゴリズムを提案することである。

LP 問題に対して、現在では Karmarkar (1984) の内点法およびその改良版が主流の解法であるが、Dantzig の単体法も広く使用されている。LP 問題の入力データである A, b, c のサイズが L としたとき、内点法とその改良アルゴリズムは L の多項式時間である(弱多項式時間アルゴリズム)。しかし、個々の入力データの数値に依存しない係数行列の m と n のみ依存する多項式時間(強多項式時間) のアルゴリズムが存在するか否かが未解決である。

Fujishige らによる最小ノルム点の算法の特徴として、等式制約条件の他にボックス制約が必要である。線形変換をした後に、制約条件となる多面体の端点の数は n の指数であるが、提案されたアルゴリズム(Fujishige et al., 2009)はうまくそれらの端点をすべて計算することなく、最適解に収束することになっている。

2. 研究の目的

上述の背景を踏まえて、本研究は LP 問題に対する理論的にも実用的にも高速なアルゴリズムを開発することは研究の目的である。具体的に構築したアルゴリズムに対して収束を数学的に証明したうえ、数値実験を行い、速度の性能を比較することにも行った。LP 問題に対する強多項式時間アルゴリズムの開発に少しでもヒントを頂くになればと思う。

3. 研究の方法

LP-Newton 法のように Zonotope を利用し、新しいアルゴリズムをデザインする。ボックス制約付きの等式標準形 LP 問題は Zonotope (凸多面体)と半直線の共通集合上の最大化問題に等価変換をし、変換した後の問題に対して、等式制約の点ベクトルはボックス制約の各頂点の凸結合で表すことを満たしながら、それらの頂点が Zonotope への射影点はちょうど Zonotope の「面」になっていることは最適解であることになりしますので、このようなボックス制約の頂点を見つけるアルゴリズムの設計を行いました。このアルゴリズムは Wolfe の最小ノルム点を求めるアルゴリズムを Zonotope の上で直接利用しないで、最適解を求めることができます。間接的にも Wolfe のアルゴリズムを利用しないで独立にアルゴリズムの設計も試案した。

4. 研究成果

開発したアルゴリズムはまだ初期の段階であるが、計算機実験により、本研究のアルゴリズムは LP-Newton 法と比較しました。次元=1000、制約の個数=150 の場合、LP-Newton は 34.3(秒)に対して、提案手法は 5.9(秒)でした。Newton steps の利用は平均で 4.0 回から 2.0 回まで下がっています。提案手法は計算速度の面で優位であることが観測されたことは言えると思われる。下記の表 1 には計算結果の比較をまとめている。

表 1 計算結果の比較

	100	100	100	100	150	150	150	150
m	100	100	100	100	150	150	150	150
n	250	500	750	1000	250	500	750	1000
LP-Newton 時間(秒)	1.8	3.1	4.5	4.3	7.9	11.4	23.9	34.3
提案手法時間(秒)	1.8	1.0	1.7	2.3	4.5	4.2	5.0	5.9
LP-Newton steps	4.7	4.0	4.0	4.0	5.0	4.6	4.1	4.0

提案手法Newton steps	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

実際、上述の数値実験よりはるかに多い実験を行った。 m と n が大きく変化させても LP-Newton steps の数は安定している特徴が確認された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Xu Wang, Kuan Lu, Jianming Shi and Takashi Hasuike	4. 巻 未定
2. 論文標題 A New MIP Approach on the Least Distance Problem in DEA	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Asia-Pacific Journal of Operational Research	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1142/S021759592050027X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuan Lu, Shinji Mizuno, Jianming Shi	4. 巻 未定
2. 論文標題 A new mixed integer programming approach for optimization over the efficient set of a multiobjective linear programming problem	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Optimization Letters	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s11590-020-01554-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Lu Kuan, Mizuno Shinji, Shi Jianming	4. 巻 61
2. 論文標題 A MIXED INTEGER PROGRAMMING APPROACH FOR THE MINIMUM MAXIMAL FLOW	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 261 ~ 271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.15807/jorsj.61.261	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ando Kazutoshi, Minamide Masato, Sekitani Kazuyuki, Shi Jianming	4. 巻 260
2. 論文標題 Monotonicity of minimum distance inefficiency measures for Data Envelopment Analysis	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 European Journal of Operational Research	6. 最初と最後の頁 232 ~ 243
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.12.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Kuan Lu, Shinji Mizuno, Jianming Shi
2. 発表標題 Solving Optimization over the Efficient Set of a Multiobjective Linear Programming Problem as a Mixed Integer Problem
3. 学会等名 The Sixth International Conference on Continuous Optimization, a flagship conference of the Mathematical Optimization Society (MOS)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jianming Shi
2. 発表標題 A Facet Pivoting Algorithm for Solving Linear Programming with Box Constraints
3. 学会等名 The Sixth International Conference on Continuous Optimization, a flagship conference of the Mathematical Optimization Society (MOS)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kuan Lu, Shinji Mizuno, Jianming Shi
2. 発表標題 A Numerical Study on MIP Approaches over the Efficient Set
3. 学会等名 World Congress on Global Optimization 2019, University of Lorraine
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 呂 寛, 施建明, 水野 眞治
2. 発表標題 効率的な集合上の最適化問題に対するMIPスキーム
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年度春期研究発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jlanming Shi, Teruyoshi Suzuki, Kyoko Yagi
2. 発表標題 The Mechanism of the Sequential Defaults by the two Firms Interconnected: A Model
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 数理計画研究部会 (RAMP: Research Association of Mathematical Programming)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 呂 寛, 水野 眞治, 施建明
2. 発表標題 効率的な集合上の最適化問題に対する混合整数問題
3. 学会等名 京都大学 数理解析研究所 共同研究 (公開型) 「高度情報化社会に向けた数理最適化の新潮流」 New Trends of Numerical Optimization in Advanced Information-Oriented Society
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jlanming Shi
2. 発表標題 A polarity-based algorithm for solving linear programming problems
3. 学会等名 The 23rd International Symposium on Mathematical Programming (2018), July 1-6, Bordeaux, France. (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kuan Lu, Shiji Mizuno, Jianming Shi
2. 発表標題 Solving the Minimum Maximal Flow as a Mixed Integer Problem
3. 学会等名 NFORMS International Conference (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 LU Kuan, Jianming Shi, WANG Xu
2. 発表標題 A Method of Computing the Closest Efficient Projection Point in Data Envelopment Analysis
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 呂 寛, 水野 眞治, 施建明
2. 発表標題 最小極大フロー問題に対するMIPスキーム
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2018年春季研究発表会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Le Thi H., Le H., Pham Dinh T. (eds) (K Lu, S Mizuno, J Shi)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 611-615頁
3. 書名 A Numerical Study on MIP Approaches over the Efficient Set, In: Le Thi H., Le H., Pham Dinh T. (eds) Optimization of Complex Systems: Theory, Models, Algorithms and Applications, Advances in Intelligent Systems and Computing	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----