様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０３６３１

研究課題名（和文）対可解ゲームの理論と応用

研究課題名（英文）Pairwise solvable games: Theory and applications

研究代表者
丸田　利昌（Maruta, Toshimasa）

日本大学・経済学部・教授

研究者番号：６０２９５７３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は，対可解ゲーム(pairwise solvable game)という2人対称ゲームのクラスを考察する．対可解ゲームは，対称定和ゲームが持つある性質を抽出し定義されるが，その外延はレント獲得ゲームなどの応用上重要なゲームを含む．対可解ゲームの均衡集合は交換可能である．ゆえに，均衡を持つ対可解ゲームはNash可解である．全順序戦略集合を持つ対可解ゲームについて，対角準凹性（単峰性の一般化）のもとでの均衡存在の必要十分条件が見いだされた．さらに，有限対角準凹対可解ゲームは被支配戦略の繰返し削除によって均衡が達成される．ゆえに，このクラスのゲームはNash可解かつ支配可解である．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ゲーム理論の標準的分析において「解」としての役割を果たしているのは（ナッシュ）均衡である．その背後には，諸個人の行動選択は均衡に行き着くという想定がある．だが，これはどのような場合に正当化されるのだろうか．すなわち，均衡に至るどのようなメカニズムがあるのだろうか．
そのようなメカニズムに，被支配戦略の繰返し削除がある．本研究は，レント獲得ゲームなどの応用上重要なゲームを含む十分大きなゲームのクラスである対可解ゲームを新たに見出し，一定の条件のもと被支配戦略の繰返し削除によってその均衡が達成されることを明らかにすることにより，この均衡の基礎問題にひとつの解答を与えるものである．

研究成果の概要（英文）：A game is solvable if the set of Nash equilibria is nonempty and interchangeable. A pairwise solvable game is a two-person symmetric game in which any restricted game generated by a pair of strategies is solvable. We show that the set of equilibria in a pairwise solvable game is interchangeable, which implies that a pairwise solvable game is solvable if it possesses an equilibrium. Under a quasiconcavity condition, we derive a complete order-theoretic characterization and some topological sufficient conditions for the existence of equilibria, and show that if the game is finite, then an iterated elimination of weakly dominated strategies leads precisely to the set of Nash equilibria, which means that such a game is both solvable and dominance solvable. All results are applicable to symmetric contests, such as the rent-seeking game and the rank-order tournament, which are shown to be pairwise solvable. Some applications to evolutionary equilibria are also given.

研究分野：ゲーム理論

キーワード：ナッシュ均衡　被支配戦略の削除　交換可能性　進化均衡　ゼロ和ゲーム

様 式 C—１９，F—１９—１，Z－１９　（共通）

１．研究開始当初の背景

経済学および関連する諸科学において，ゲーム理論は複数個人間の相互作用を分析する際の共通言語として定着している．標準的分析においては，人々の相互作用の有様がゲームとしてモデル化され，そのゲームのナッシュ均衡が求められ，その効率性や安定性などが吟味される．すなわち，ここでモデルの「解」としての役割を果たしているのはナッシュ均衡である．この背後には，ゲームにおける諸個人の選択はナッシュ均衡（以下，単に「均衡」）を構成するという想定がある．ところで，この想定はどのような場合に正当化されるのだろうか．すなわち，均衡に至るどのようなメカニズムがあるのだろうか．この問いを考察する諸研究を総称して均衡基礎論と呼ぶ．

研究代表者は一貫して均衡基礎論の研究に従事してきた (Maruta (1997, Games Econ Behav, 2002 J Econ Behav), Maruta and Okada (2012, Math Soc Sci) 等)．これまでの均衡基礎論は，合理的意思決定の結果として均衡をとらえる「合理的接近」と，それを試行錯誤的な戦略調整を経て到達される状態と考える「進化的接近」の二つに大別することができる．先行研究によれば，均衡に至るメカニズムを「一般のゲーム」に対して与えることには成功していない一方で，考察するゲームの持つ特徴に応じて，いずれかの接近法か，あるいはその双方により，均衡プレイのメカニズムが解明されてきた．この意味で，二つの接近法は代替的であるとともに補完的であって，均衡基礎論の課題は，どのような性質を持つゲームに対しどの接近法がよく当てはまるかを明らかにしてゆくことであると言える．特に，応用上重要なゲームをより多く含むゲームのクラスについて，均衡に至るメカニズムを解明してゆくことが求められる．

２．研究の目的

均衡基礎論における「合理的接近」を代表するのが，被支配戦略の繰返し削除である．被支配戦略の繰返し削除により均衡が達成されるゲームのひとつに，ホテリングの（1 次元）立地モデル（または，選挙モデル）がある (Hotelling 1929, Econ J)．離散化された形では，それは次のようなゲームとなる．東西に 1 直線にならぶ n 個の区域からなる都市を考える．競争関係にある小売チェーン A と B は，それぞれ 1 店舗この都市に出店を計画している．各区域に属する消費者にとってはどちらのチェーンの店舗も無差別であり，自身の属する区域に最も近い区域に存する店舗で 1 単位の消費を行うとしよう．売上最大化を目指す A と B はどの区域に出店するだろうか．

このゲームは 2 人対称ゼロ和ゲームとなるが，興味深いことに，その均衡は被支配戦略の繰返し削除によって達成される．通常，ゼロ和ゲームの均衡分析はミニマックス定理に基づきマックスミン戦略の組み合わせとして特徴づけられることが多い．ところが，ミニマックス定理はゼロ和ゲームにのみ成立する結果であり，ゼロ和ゲームそのものも特殊な社会経済環境にしか対応せず，応用範囲が極めて限られると考えられてきた．立地ゲームの存在は，このような見解が妥当なものではないことに気づかせてくれる．あらためて考えれば自明なことだが，ゼロ和ゲームの均衡分析はなにもミニマックス定理に基づかなければならないわけではなく，一般のゲームに対し意味を持つ均衡達成メカニズムの観点からこれを行うこともできる．立地ゲームは，そうすることによって実りある結果が得られるゼロ和ゲームとなっているのだ．

このような認識は，被支配戦略の繰返し削除によって均衡が達成される，ゼロ和ゲームを含みながらもそれを大きく拡張するようなゲームのクラスがあるのではないだろうかという問題意識につながる．このような背景から研究代表者によって発見されたのが，**対可解ゲーム**（pairwise solvable game）である．対可解ゲームの性質の解明と応用範囲の見極めが本研究の課題である．

３．研究の方法

本研究は理論研究であり，その遂行に際し特段の調査･実験などは伴わない．先行研究として特に参考にしたのは，定和ゲーム･狭義競争ゲームの拡張について考察した，Kats and Thisse (1992, “Unilaterally competitive games,” Int J Game Theory)，ゼロ和ゲームの純粋戦略均衡について考察した Duersch et al. (2012, “Pure strategy equilibria in symmetric two-player zero-sum games,” Int J Game Theory)，弱い外部性を持つゲームを考察した Ania (2008, “Evolutionary stability and Nash equilibrium in finite populations, with an application to price competition,” J Econ Behav Organ) がある．対可解ゲームがこれらのゲームを包摂するものであることが，首都大学東京（現：東京都立大学）の飯村卓也と渡辺隆裕により研究代表者が出席していた定期的な勉強会の席上で指摘された．以後，3 名の共同で研究は進展した．

４．研究成果

本研究の成果は，次の論文にまとめられ，出版された．

“Two-person pairwise solvable games,” (Toshimasa Maruta, with Takuya Iimura and Takahiro Watanabe), *International Journal of Game Theory*, *online first*, doi:10.1007/s00182-020-00709-1, 29 January 2020.

“Equilibria in games with weak payoff externalities,” (Toshimasa Maruta, with Takuya Iimura and Takahiro Watanabe), *Economic Theory Bulletin*, 7 (2019), 245-258.

まずはじめに対可解ゲームの定義を述べ，ついで各論文で得られた主要な結果を概観する．

	A	B
A	$0,0$	$-a,a$
B	$a,-a$	$0,0$

図 1: 対称ゼロ和ゲーム

（1）定義．まず始めに，2 人 2 戦略対称ゼロ和ゲームを考えよう．対称性およびゼロ和性から，このクラスに属するゲームはひとつのパラメタ a により，図 1 の G_1 のように定まる．$a>0$ のとき，戦略 B は戦略 A を支配する．$a<0$ であれば，戦略 A は戦略 B を支配する．$a=0$ ならば，両戦略は同値である．

よって，2 人対称ゼロ和ゲームにおいて，次の性質が成り立つ：

(PS) 戦略集合から任意に 2 つの戦略を選び，それらの定める 2 人 2 戦略対称ゲームを考える．そのようなゲームすべてにおいて，いずれかの戦略のうち一方が他方を支配するか，あるいは両戦略は同値である．

定義 任意の戦略集合を持つ 2 人対称ゲーム G を考える．G が**対可解** (pairwise solvable) であるとは，条件 (PS) が成り立つことをいう．

（2）Two-person pairwise solvable games

（2.1）適用範囲．定義より，2 人対称ゼロ和ゲームは対可解ゲームである．実際には，対可解ゲームの適用範囲はゼロ和ゲームを大きく超え，応用上重要な様々なゲームを含む．例えば，Tullock (1980, "Efficient rent-seeking," in J.M. Buchanan et al. (eds), *Towards a Theory of the Rent Seeking Society*) 流のレント獲得 (rent-seeking) ゲームを考える．2 人のプレイヤーがそれぞれ x, y という努力水準を投下する．費用は $c(\cdot)$ である．努力水準の組 (x, y) に応じ，確率 $p(x, y)$ で第 1 プレイヤー（行プレイヤー）が「勝者」となり，価値 $V > 0$ のレントを獲得する．確率 $1 - p(x, y)$ で第 2 プレイヤーが V を得る．利得関数は $u(x, y) = p(x, y)V - c(x)$ であり，$p(x, y)$ は $p(x, y) + p(y, x) = 1$ なる対称な確率関数，特に $p(x, x) = 1/2$ である．簡単な計算より，

$$u(x, x) - u(y, x) = \left(p(x, y) - \frac{1}{2}\right)V + c(y) - c(x) = u(x, y) - u(y, y)$$

と確認できる．すなわち，レント獲得ゲームは対可解である．一般に，対称確率関数 $p(x, y)$，費用 $c(x)$，および外部性 $e(y)$ とし，$u(x, y) = p(x, y)V + p(y, x)W - c(x) + e(y)$ と表されるゲームは対可解である．例えば，Lazear and Rosen (1981, "Rank-order tournaments as optimum labor contracts," J Polit Econ) の rank-order tournament ゲームも対可解である．

（2.2）交換可能性．ゲームの均衡集合が交換可能であるとは，均衡集合がその各プレイヤーの戦略集合上への射影の直積集合となっていることである．Nash (1951, Ann Math) は，交換可能な非空の均衡集合をゲームの解，それを持つゲームを可解 (solvable) とよんだ．本研究は，対可解ゲームの均衡集合は交換可能であることを示した．したがって，均衡を持つ対可解ゲームは Nash の意味で可解である．

（2.3）均衡の存在．応用上特に有用である，戦略集合が全順序集合（例：実数の区間）であるゲームに焦点を絞り，利得についての単峰性条件を一般化した対角準凹性条件のもと，対可解ゲームの均衡の存在の必要十分条件を得た．この結果は，ホテリング・ゲームのような利得が非連続なゲームにも適用できる．

（2.4）被支配戦略の繰返し削除．明示的に定式化された戦略削除規則が被支配戦略の削除になっていることを示し，さらにその繰返しがゲームの均衡集合にちょうど一致する時点で止まることを証明することにより，対角準凹な有限対可解ゲームが支配可解 (Moulin 1979, Econometrica) であることを示した．したがって，このクラスのゲームは Nash の意味で可解であると同時に，Moulin の意味で支配可解でもあることが明らかとなった．

（2.5）進化均衡との関連．相対利得ゲームの均衡である進化均衡 (Schaffer 1988, "Evolutionarily stable strategies for a finite population and a variable contest size," J Theor Biol) とナッシュ均衡は，一般には異なる．これらがともに対称均衡である場合は，それらのパレート比較が興味ある問題となる．この点につき，対可解ゲームにおける進化均衡はナッシュ均衡に対しパレート劣位であることを明らかにした．すなわち，spiteful behavior が非効率性を生むという直観が対可解ゲームでは正しいものとなる．

（3）Equilibria in games with weak payoff externalities

（3.1）狭義競争ゲームを一般化した unilaterally competitive game や 弱い外部性を持つゲームにおいては，相対利得ゲームの均衡である進化均衡とナッシュ均衡が一致することが知られていた．本研究は，新たに定義した部分的に弱い外部性を持つゲーム (games with partially weak payoff externality) が，進化均衡とナッシュ均衡が一致するゲームのクラスの既存の結果を拡張することを示した．これは,「「競争」ゲームにおいては，相対利得最大化と利得最大化が同値である」という直観的理解が正しくなるゲームのクラスを拡張するものである．

（3.2）部分的に弱い外部性を持つゲームは対可解ゲームであることから，部分的に弱い外部性を持つゲームの均衡の存在証明には対可解ゲームについての議論を応用できる．本研究は，部分的に弱い外部性を持つ n 人ゲームから，対応する 2 人対可解ゲームを構成した．ついで，2 人対可解ゲームの新たな均衡の存在条件を示すことによって，部分的に弱い外部性を持つ n 人ゲームの均衡存在を導いた．

（4）最後に，最も意義のある結果であると考えれる (2.4) について，離散レント獲得ゲームの実例をあげる．$S = \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$ とし，任意の $s, t \in S$ について $p(s,t) = s^{1/2}/(s^{1/2} + t^{1/2})$ とする（ただし，$p(0,0) = 1/2$ と定める）．

利得関数 $u(s,t) = 4p(s,t) - s$ を持つ 6×6 ゲームを考える（図 2．ただし，行プレイヤーの利得のみ表示）．これはレント獲得ゲームの離散モデルであり（レント価値 $V = 4$），対可解である．対角準凹性条件は利得の単峰性によって満たされている．戦略 0 は戦略 1/5 により，戦略 1 は戦略 4/5 により，それぞれ支配される．0 と 1 を削除すると，戦略 1/5 は戦略 2/5 により，戦略 4/5 は戦略 3/5 により，それぞれ支配される．これらを削除し戦略 2/5 と 3/5 からなるゲームを考えると，最後に 3/5 が残る．戦略組 (3/5, 3/5) はこのゲームの一意の均衡である．

	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
0	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1/5	3.800	1.800	1.457	1.264	1.133	1.036
2/5	3.600	1.943	1.600	1.398	1.257	1.150
3/5	3.400	1.936	1.602	1.400	1.256	1.146
4/5	3.200	1.867	1.543	1.344	1.200	1.089
1	3.000	1.764	1.450	1.254	1.111	1.000

図 2: レント獲得ゲーム

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Iimura, T., Maruta, T. & Watanabe, T.	４．巻 7
２．論文標題 Equilibria in games with weak payoff externalities	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Economic Theory　Bulletin	６．最初と最後の頁 245-258
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40505-018-0157-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Iimura, T., Maruta, T. & Watanabe, T.	４．巻 online first
２．論文標題 Two-person pairwise solvable games	５．発行年 2020年
３．雑誌名 International Journal of Game Theory	６．最初と最後の頁 1-25
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00182-020-00709-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考