2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６０７

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2019

課題番号：１７Ｋ０５１４６

研究課題名（和文）非斉次ポテンシャルで相互作用する3体問題周期解の数値計算による研究

研究課題名（英文）Numerical study on periodic solution of three-body problem under inhomogeneous interaction potential

研究代表者

福田　宏（Fukuda, Hiroshi）

北里大学・一般教育部・教授

研究者番号：７０２３８４８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：原子，分子の相互作用を近似した，Lennard-Jones型の非斉次ポテンシャルのもとで，等質量3体が同じ8の字型の軌道上をおっかけするように運動する，古典力学の8の字周期解には，様々な形のものが存在し，周期Tによってその軌道の形が変化する。本研究では，この8の字解について，分岐現象が起こること，作用汎関数のモース指数が変化することが分岐の必要条件であり，ほぼ十分条件であること，モース指数を変化させる変分関数によって分岐解が記述できることを見出した。そして，これを一般化して，作用汎関数に群論的分岐理論を適用してn体問題周期解の分岐理論を構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
天体の運動は，力が距離の2乗に反比例する，万有引力の法則に従う。本研究では，その力を，原子や分子の間に働く，距離が離れると距離の7乗に反比例するようになるLennard-Jones型の力に置き換えて，3つの同じ質量の天体が，8の字型の軌道上をおいかけっこする8の字運動の研究をした。この8の字運動には様々な形のものがあり，運動の周期Tを変化させると，8の字の形が変化し，解が2種類以上に分裂する分岐現象が起こる。我々は，特に分岐現象についてコンピュータで詳しく数値計算して，そのメカニズムを解明した。そして，一般にn個の天体の運動に適応できる分岐理論を構築した。

研究成果の概要（英文）：For equal mass three-body system in classical mechanics interacting through Lennard-Jones-type inhomogeneous potential, a model potential between atoms, there exist a lot of figure-eight choreographic solutions in which three bodies move in the same eight shaped orbit periodically. The solutions change shapes of the orbits by period T. We found that the solution bifurcate, that the necessary and almost sufficient condition for the bifurcation is the change of Morse index of the action functional, and that the bifurcated solution can be determined by the variation functions responsible to the change of Morse index. Further, we developed a bifurcation theory for periodic solution in n body system by action functional and the group theoretic bifurcation theory.

研究分野：情報通信 / 計算科学 / 3体問題

キーワード：8の字解　分岐　群論的分岐理論　Lennard-Jones型ポテンシャル　作用汎関数

１．研究開始当初の背景

1993 年，Moore は斉次ポテンシャル$-1/r^{\alpha}$で相互作用する等質量 3 体古典力学系（以下，斉次系）において，8 の字型の周期解（以下，8 の字解）を発見した[1]。r は粒子間の距離である。8 の字解は，等質量 3 体が，図 1 に示すような 8 の字型の同一軌道上を，ぶつからずに追いかけっこをする周期解である。

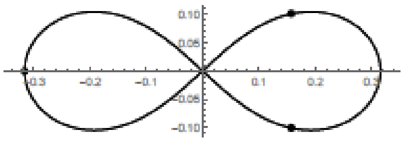
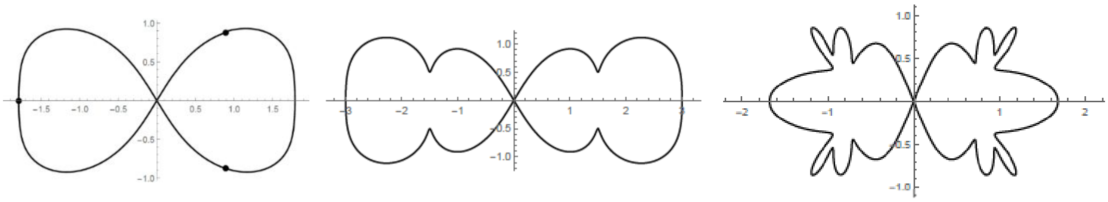


図 1：8 の字解

2000 年，Moore とは独立に Chenciner と Montgomery は，8 の字解の存在を数学的に証明して注目を浴びた。というのは，3 体が同一軌道上を周回する「舞踏性」をもつ解は，この存在証明が行われるまでは，3 体が正三角形を作る 1772 年の単純な Lagrange 解しか知られていなかったからである。8 の字解は，以来，20 世紀初頭に「3 体問題は解析的には解けない」という有名なポアンカレの定理からはじまった力学系分野における研究対象となった。

2010 年，Sbano は，原子・分子の相互作用をモデル化した Lennard-Jones(以下 LJ)型ポテンシャル $1/r^{12}-1/r^{6}$ の元では，複数の 8 の字解が存在することを数学的に証明した[2]。8 の字解は，斉次系においては，指数α毎に図 1 のような 1 種類しか知られていない。そして，2017 年，我々は，Sbano とは独立に，LJ 型ポテンシャルの系で，数値的に図 2(a)に示すような，標準型の 8 の字解の他に，図 2(b)の瓢箪（ひょうたん）型や図 2(c)のカエル型などの様々な形の 8 の字解を多数発見した[3]。



(a)　(b)　(c)

図 2：LJ 系の 8 の字解

２．研究の目的

本研究の目的は，Sbano が証明し，我々が発見した，非斉次ポテンシャルの元での多彩な 8 の字解の性質を数値的，理論的に詳しく調べることである。特に，次のような，非斉次効果に着目する。

非斉次系とは，相互作用ポテンシャルが斉次(同次)式でない非斉次ポテンシャルの系である。斉次系では，ポテンシャル$-1/r^{\alpha}$の斉次性によって，運動方程式がスケール不変であり，解は周期 T によらず常に相似になるが，LJ をはじめとする非斉次系では，周期 T によって解の形が変化しうる。実際，図 2(b)の瓢箪型の解は T を大きくするとより鋭い瓢箪型に変化し，T を小さくすると瓢箪のくぼみが浅くなって図 2(a)の標準型の 8 の字に近づく，大きな非斉次効果を示す[3]。そして，このように，T をパラメタとして，解が大きく変化することから，解が複数の解に分裂する分岐現象が起こることも予想される。

３．研究の方法

本研究では，解 q の性質を，ラグランジアン L を時間積分した作用汎関数 S の解 q のまわりの幾何学的な性質から調べる。そのために，S(q+δq)を解 q のまわり δq で展開した展開係数である第 n 変分 $D(\delta q)^{n}S$,

$$D(\delta q) = \delta q \frac{\partial}{\partial q} + \dot{\delta q} \frac{\partial}{\partial \dot{\delta q}}$$

を計算する。

第一変分 D(δq)S は運動方程式の解 q に対しては 0 なので，意味のある展開係数は，第 2 変分 $D(\delta q)^2 S$ からである。第 2 変分は，δq の 2 次形式

$$D(\delta q)^2 S = \int_0^T dt \;\; \delta q^* H \delta q \,, H = -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2}$$

になるので，その計算は演算子 H の固有値問題に帰着し，δq(t)をフーリエ級数で展開することで，実対称行列の固有値問題として数値計算が可能になる。[4]

４．研究成果
(1) 作用汎関数 S の第 2 変分を負にする独立な変分関数の個数を作用のモース指数 N(T) という。我々は，分岐が起きる必要条件が作用のモース指数 N(T) が変化することであることを見出した [5]。そこで，T→∞で，斉次ポテンシャル$-1/r^6$の 8 の字解に漸近する，図 2(a) の標準型 8 の字解について，モース指数 N(T) の変化 ΔN(T) を計算し，表 1 に示す 8 箇所で，モース指数が変化すること，その全てから分岐解が生じることを数値計算で求めた。この解の周期 T は T=14.479 が最小で，そこで折り返して，図 2(b) の瓢箪型の解に接続する。表 1 の左側の欄が標準型，右側が瓢箪型 8 の字解である。

表 1：モース指数の変化

α_-			α_+		
T	$\Delta N(T)$	Q	T	$\Delta N(T)$	Q
14.479		C_{xy}	16.111	2	D
14.595	-1	C_x	16.878	2	D_y
14.836	-2	D_y	17.132	1	C_y
14.861	-2	D	18.615	1	C_2

(2) 次に，モース指数が変化して実際に分岐が起こる場合，分岐する解は，モース指数を変化させる変分関数 δq によって Q=q+δq の形に書ける事を見出した。ここで，δq には独立な変分関数の線形結合の任意性があるが，それは，S(q+δq) が δq に関する停留点であることを要請して固定される。これより，一つの分岐点から分岐する全ての解を知ることができる。

例えば，T=14.836 の分岐では|ΔN(T)|=2 なので，2 つの独立な変分関数，δq_1，δq_2 があり，それを規格直交化した線形結合係数をh_1，h_2 すなわち，$\delta q = h_1\delta q_1 + h_2\delta q_2$とすると，その作用$S(q + h_1\delta q_1 + h_2\delta q_2)$ は図 3 の等高線図のようになる。図 3 の縦軸，横軸はh_1，h_2である。等高線図から，線形結合係数h_1，h_2は，鞍点になっている正三角形の頂点の位置の 3 通りに固定されることがわかる。

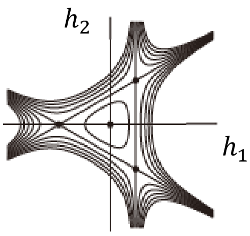


図 3：$S(q + h_1\delta q_1 + h_2\delta q_2)$

(3) 分岐解は，Q=q+δq と同じ対称性をもつ初期条件で，分岐点近くで解の探索を行うことにより求めることができる。図 4 は，表 1 の T=14.836 で分岐する分岐解である。

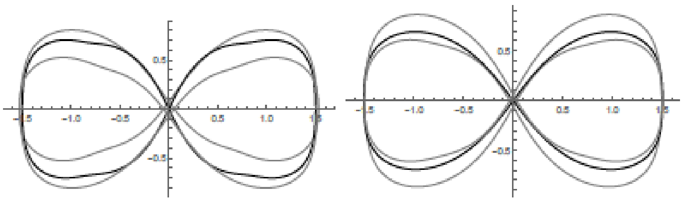


図 4：T=14.836 で分岐する分岐解

この分岐解は，3 体の軌道が x 軸にも y 軸にも対称で，それゆえ t=0 で 1 粒子が x 軸上にある配置の初期条件

$$(x_0, y_0) = (x, y), (x_1, y_1) = (-2x, 0), (x_2, y_2) = (x, -y)$$
$$(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (-\cos\theta, -\sin\theta), (\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (0, 2\sin\theta), (\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (\cos\theta, -\sin\theta), \theta = \tan^{-1}\frac{y}{3x}$$

と t=T/4 における終条件

$$(x_1, y_1) = 0, \dot{x}_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1\dot{x}_2 = 0$$

から探索することができる。ここで，(x_j, y_j) は粒子 j の座標である。

(4) 数値計算から見いだされた，以上の方法は，作用汎関数に基づく群論的分岐理論 [6] によって説明されることがわかった。また，分岐の必要条件であるモース指数の変化は，ほぼ十分条件であることもわかった。[7]

群論的分岐理論によれば，もとの解の対称性のなす群の既約表現とその次元が分岐の種類とモース指数の変化の絶対値に対応する。8 の字解の場合，解のもつ対称性は 2 面体群 D_6 であり，D_6 の既約表現は 1 次元が 4 つ，2 次元が 2 つで，分岐はこれらに対応する 6 種類存在することに

なる。

1 次元の既約表現に対応する分岐解は，舞踏性を持ち，パラメタ T の片側に生じ，軌道が x 軸にも y 軸にも対称か，x 軸か y 軸のどちらかにのみ対称か，原点対称かの 4 種類である。これらを順に C_{xy},C_x,C_y,C_2 と表すことにする。表 1 の Q 欄がこの分岐解の対称性である。表 1 をみると，この 4 種類の分岐が全て，1 つずつ生じていることがわかる。T=14.479 における折返し分岐から生じる C_{xy} 対称性の分岐解は，図 2(a)の標準型と図 2(b)の瓢箪型，T=14.595，18.615，17.132 の分岐解は順に，図 5(a)-(c)に掲載した，C_y，C_2，C_x型である。

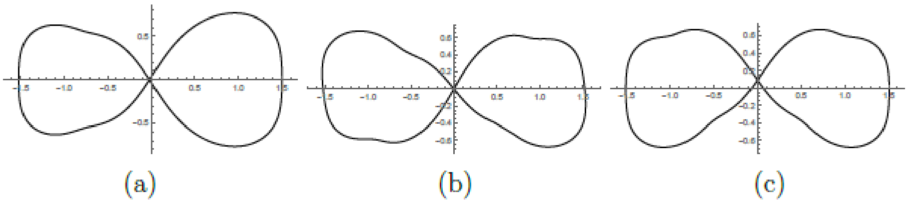


図 5：1 次元分岐からの分岐解. (a) T=14.595, (b) T=18.615, (c) 17.132

次に，2 種類の 2 次元の既約表現に対応する分岐解は，どちらも舞踏性をもたない。D_yと表記する分岐では，パラメタ T の両側に軌道が x 軸にも y 軸にも対称な，同じ対称性の分岐解を生じ，D と表記するもう一種類の分岐では，パラメタ T の片側に x 軸にだけ対称か，原点対称な 2 種類の対称性の分岐解が生じる。表 1 をみると，この 4 種類の分岐が全て，2 つずつ生じていることがわかる。図 4，図 6-図 8 にこれらの分岐解を示す。

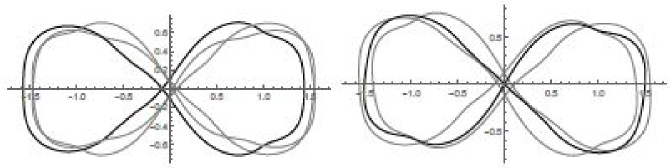


図 8：T=16.111, D 型分岐解

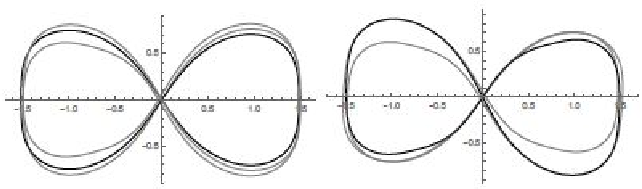


図 6：T=14.861, D 型分岐解

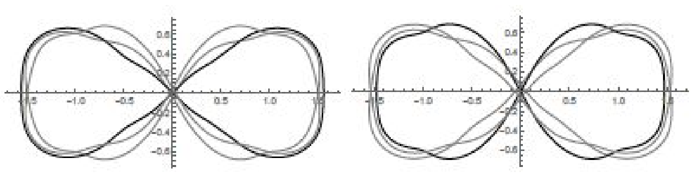


図 7：T=16.878, D_y型分岐解

参考文献

[1] C. Moore, Phys. Rev. Lett. 70, 3675 (1993).
[2] L. Sbano, Dynamical Systems 25, 53-73 (2010).
[3] Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H 2017 Figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem with Lennard-Jones-type potentials J. Phys. A: Math. Theor. 50 105202 16p.
[4] Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H 2019 Morse index and bifurcation for figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem J. Phys. A: Math. Theor. 52 185201 19p.
[5] Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H 2018 Morse index for figure-eight choreographies of the planar equal mass three-body problem J. Phys. A: Math. Theor. 51 145201 18p
[6] M. Golubitsky et al, Singularities and Groups in Bifurcation Theory (書籍 1988).
[7] Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H 2020 Variational principle of action and group theory for bifurcation of figure-eight solutions arXiv:2002.03496

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

1．著者名 Fukuda Hiroshi、Fujiwara Toshiaki、Ozaki Hiroshi	4．巻 52
2．論文標題 Morse index and bifurcation for figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6．最初と最後の頁 185201～185201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ab1270	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Fukuda Hiroshi、Fujiwara Toshiaki、Ozaki Hiroshi	4．巻 51
2．論文標題 Morse index for figure-eight choreographies of the planar equal mass three-body problem	5．発行年 2018年
3．雑誌名 J. Phys. A.	6．最初と最後の頁 145201～145201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aab06d	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Fujiwara Toshiaki、Fukuda Hiroshi、Ozaki Hiroshi	4．巻 math-ph
2．論文標題 Variational principle for bifurcation in Lagrangian mechanics	5．発行年 2019年
3．雑誌名 arXiv	6．最初と最後の頁 1905.11073
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Fujiwara Toshiaki、Fukuda Hiroshi、Ozaki Hiroshi	4．巻 math-ph
2．論文標題 Variational principle of action and group theory for bifurcation of figure-eight solutions	5．発行年 2020年
3．雑誌名 arXiv	6．最初と最後の頁 2002.03496
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　1件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 藤原 俊朗, 福田 宏, 尾崎 浩司
2．発表標題 三体8の字解の分岐 -作用と線形安定性の2つの視点から-
3．学会等名 2018年度冬の力学系研究集会
4．発表年 2019年

1．発表者名 Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H
2．発表標題 Morse index and periodic solutions bifurcated from the figure-eight choreography for the equal mass three-body problem
3．学会等名 HAMSYS 2018（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 藤原 俊朗, 福田 宏, 尾崎 浩司
2．発表標題 三体8の字解と、それから分岐する解の線形安定性
3．学会等名 応用数理学会2018年度年会
4．発表年 2018年

1．発表者名 Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H
2．発表標題 Periodic solutions around figure-eight choreography for the equal mass three-body problem
3．学会等名 AIMS 2018（国際学会）
4．発表年 2018年

１．発表者名
Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H

２．発表標題
Linear Stability and Morse Index for the Figure-Eight and K = 5 Slalom Solutions Under Homogeneous Potential

３．学会等名
AIMS 2018

４．発表年
2018年

１．発表者名
福田宏，藤原俊朗，尾崎浩司

２．発表標題
等質量3体8の字解のモースインデックス

３．学会等名
応用数理学会2017年度年会

４．発表年
2017年

１．発表者名
福田宏

２．発表標題
等質量3 体8 の字コレオグラフィーの近くに存在する周期解

３．学会等名
天体力学N体力学研究会2018

４．発表年
2018年

１．発表者名
Fujiwara T, Fukuda H, Ozaki H

２．発表標題
Variational principle of action and group theory for bifurcation of figure-eight solutions

３．学会等名
Celestial Mechanics and Beyond（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

1．発表者名 藤原 俊朗，福田 宏，尾崎 浩司
2．発表標題 変分原理の周期解の分岐への応用
3．学会等名 応用数理学会2019年度年会
4．発表年 2019年

1．発表者名 Fukuda H, Fujiwara T, Ozaki H
2．発表標題 Bifurcation of Simo H solution bifurcated from figure-eight choreographies of the equal mass three-body problem
3．学会等名 天体力学N体力学研究会2019
4．発表年 2019年

〔図書〕　計1件

1．著者名 藤原 俊朗，福田 宏，尾崎 浩司	4．発行年 2020年
2．出版社 日本評論社	5．総ページ数 6
3．書名 「変分原理と群論が解き明かす三体8の字解の分岐」 特集＝3体問題と力学系『数学セミナー』2020年1月号通巻699号	

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://kilin.clas.kitasato-u.ac.jp/3body/bifurcation/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考