

令和 3 年 4 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05154

研究課題名（和文）逆軌道体構成法を用いた中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性の研究

研究課題名（英文）Research on uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 by using reverse orbifold construction

研究代表者

島倉 裕樹 (Shimakura, Hiroki)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：90399791

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000 円

研究成果の概要（和文）：頂点作用素代数における有名な未解決問題の一つに中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類問題がある。候補となる 71 個が構成されており、残された問題は重さ 1 の空間のリー代数構造から頂点作用素代数構造から決まるという一意性の問題であった。

研究開始当初では 41 個の正則頂点作用素代数の一意性が未解決であった。本研究では逆軌道体構成法を用いて 11 個の一意性を証明した。他の研究者の成果と合わせることで、重さ 1 の空間が非自明な 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性が証明された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

中心電荷 24 の正則頂点作用素代数には様々な階数 24 の正定値のユニモジュラ偶格子との類似が観察されている。本研究の研究成果はその根拠の一つとなるものである。また、階数 24 の正定値のユニモジュラ偶格子の応用範囲は頂点作用素代数のみならず、代数幾何学、整数論、組合せ論、有限群論など多岐にわたっている。同様に、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の他分野への応用も期待されており、その際には今回の成果が役立つ。

研究成果の概要（英文）：The classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 is one of famous problems in vertex operator algebra theory. The 71 candidates have been constructed, and the remaining problem is to prove that the vertex operator algebra structure is uniquely determined by the Lie algebra structure of the weight one subspace.

At the beginning of this research project, there are the remaining 41 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 whose uniqueness have not been proved yet. The main result is to prove the uniqueness of the 11 cases by using the reverse orbifold construction. Combining the results by us and other researchers, we have proved the uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 with non-trivial weight one subspaces.

研究分野：頂点作用素代数

キーワード：代数学 頂点作用素代数 正則頂点作用素代数 軌道体構成法 リー代数 リーチ格子 逆軌道体構成法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

「中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類」は頂点作用素代数の研究当初から考えられてきた未解決問題の一つである。階数 24 の正定値ユニモジュラ偶格子の分類との類似の視点から、頂点作用素代数の重さ 1 の空間に入るリー代数構造が頂点作用素代数構造を特徴づけると考えられてきた。1993年に重さ 1 の空間のリー代数構造の可能性が 71 個のリストとして与えられた ([Sc93])。よって、分類を完成させるには、これら 71 個のリー代数構造を持つ中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を「構成」し、リー代数構造から頂点作用素代数構造が定まるという「一意性の証明」を行えば良い。軌道体構成法を用いて、71 個のリー代数構造を持つ 71 個の正則頂点作用素代数が 2016 年までに具体的に「構成」された。したがって、「一意的な証明」ができれば、分類が完成する。

本研究開始当初では、30 個の場合に一意性が証明されていた。したがって、残りの 41 個の正則頂点作用素代数の一意性の証明が求められていた。

また、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成及び一意性の証明は個々に証明されていたため、何が本質的かわかりにくい状況であった。そこで、すべての中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成および一意性の証明を統一的な手法で行うことが求められていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数構造が重さ 1 空間のリー代数構造から一意的に決まることを証明することである。さらに、統一的な分類の証明を与え、分類問題の理解に繋げる。

3. 研究の方法

正則頂点作用素代数の一意性の証明方法を先行研究で提案している。具体的には、正則頂点作用素代数が軌道体構成法で構成されており、その逆向きの軌道体構成法に付随する自己同型が内部自己同型の場合に、元の正則頂点作用素代数の自己同型の共役類の一意性に帰着させて、正則頂点作用素代数の一意性の証明を行う。この手法を逆軌道体構成法による一意性の証明方法と呼ぶことになる。この手法を多くの場合に適用することで、研究の目的の解決を目指す。

まずは、格子頂点作用素代数に軌道体構成法を適用して得られる中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性の証明を行う。この場合は格子頂点作用素代数の自己同型群がよく研究されており、自己同型の共役類の一意性の証明が比較的易しい。そのために、まずは格子頂点作用素代数に軌道体構成法を適用して構成される正則頂点作用素代数がどのくらいあるかを調べる。その後、元に戻る自己同型が実際に内部自己同型になること、自己同型の共役類の一意性など、逆軌道体構成法による一意性の証明法が適用できることを確認する。

次に、格子頂点作用素代数から軌道体構成法で構成することが難しそうな正則頂点作用素代数の一意性の証明に取り組む。特に、格子頂点作用素代数以外の正則頂点作用素代数と位数 2 の自己同型に軌道体構成法を適用して得られる正則頂点作用素代数の一意性の証明に取り組む。格子頂点作用素代数以外の正則頂点作用素代数の自己同型群を決定することは一般には難しい。しかしながら、共役類の一意性を証明するためには、重さ 1 の空間に自明に作用する部分群を決定すれば十分な事に気がついた。そこで、正則頂点作用素代数のアフィン部分頂点作用素代数の加群構造を調べ、分岐則を用いてこのような自己同型の可能性を絞りつつ、この部分群を決定する。そして、リー代数の自己同型群の共役類を調べることで問題の解決を図る。

4. 研究成果

本研究によって 11 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数に対して、逆軌道体構成法を用いて一意性を証明することに成功した。他の研究者の研究成果と合わせることで、残り 41 個のうち 40 個の一意性が証明され、本研究目的である中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性の証明が概ね完成した。最後の 1 個は重さ 1 の空間が自明となるムーンシャイン頂点作用素代数であり、この一意性は 30 年以上も未解決な予想である ([FLM88])。この場合は、内部自己同型を持たないため、逆軌道体構成法による一意性の証明方法を適用することが難しく、本質的に別の証明方法が必要となると思われる。

また、本研究の研究成果からいくつかの中心電荷 24 の正則頂点作用素代数がリーチ格子頂点作用素代数から 1 回の軌道体構成法で得られることが分かった。この成果をきっかけとして、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な分類の証明の機運が高まった。具体的には、リーチ格子頂点作用素代数から 1 回の軌道体構成法ですべての中心電荷 24 の正則頂点作用素代数が構成され、その逆軌道体構成法を考えることで一意性の証明が得られそうなことを裏付ける

結果となった。実際に、他の研究者によってこの方法による統一的な構成が行われ、統一的な一意性の証明は本研究の一部として行った。これら成果により、分類問題の証明の見通しが良くなり、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の理解がより深まった。

具体的な研究成果は以下の通りである。

- (1) 5 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数がリーチ格子頂点作用素代数から 1 回の軌道体構成法で構成されることを証明した。さらに、逆軌道体構成法を用いることで、これら正則頂点作用素代数の一意性を証明した。この研究手法を発展させて、リーチ格子頂点作用素代数を用いて、すべての中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成及び一意性を証明しようという機運が高まった。
- (2) 格子頂点作用素代数と非同型な 3 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数に対して、リー代数上に自明に作用する自己同型群を決定した。さらに、軌道体構成法に用いる自己同型の共役類の一意性を証明した。この応用として、6 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性を証明した。この時点で、重さ 1 の空間が非自明である 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性の証明が完成し、分類問題の証明が概ね完成した。
- (3) 格子頂点作用素代数と -1 自己同型の持ち上げに軌道体構成法を適用して得られる 14 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の自己同型群を決定した。特に、リー代数へ自明に作用する正規部分群とリー代数の単純イデアル上への置換の作用を完全に決定した。これは中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の自己同型群の決定という次の問題に対する最初の一步となる成果である。
- (4) リー代数が自明でない 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数に対して、ある種の内部自己同型に軌道体構成法を適用してリーチ格子頂点作用素が得られることを証明した。さらに、逆軌道体構成法を用いて、70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性を統一的な方法で証明した。

< 引用文献 >

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c=24$ conformal field theories, Comm. Math. Phys. 153 (1993), 159--185.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 7件）

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Lam Ching Hung, Shimakura Hiroki | 4. 巻 372 |
| 2. 論文標題 Reverse orbifold construction and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 7001 ~ 7024 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7887 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 LAM CHING HUNG, SHIMAKURA HIROKI | 4. 巻 25 |
| 2. 論文標題 INERTIA GROUPS AND UNIQUENESS OF HOLOMORPHIC VERTEX OPERATOR ALGEBRAS | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Transformation Groups | 6. 最初と最後の頁 1223 ~ 1268 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-020-09570-8 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 SHIMAKURA Hiroki | 4. 巻 72 |
| 2. 論文標題 Automorphism groups of the holomorphic vertex operator algebras associated with Niemeier lattices and the $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -isometries | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 1119 ~ 1143 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/81788178 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |
| 1. 著者名 LAM CHING HUNG, SHIMAKURA HIROKI | 4. 巻 168 |
| 2. 論文標題 On orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society | 6. 最初と最後の頁 261 ~ 285 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004118000658 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 島倉裕樹 | 4. 巻 2086 |
| 2. 論文標題 Orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 | 6. 最初と最後の頁 154 ~ 162 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Lam Ching Hung, Shimakura Hiroki | 4. 巻 14 |
| 2. 論文標題 71 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica NEW SERIES | 6. 最初と最後の頁 87 ~ 118 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21915/BIMAS.2019105 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-------------------------------|
| 1. 著者名 van Ekeren Jethro, Lam Ching Hung, Moller Sven, Shimakura Hiroki | 4. 巻 380 |
| 2. 論文標題 Schellekens' list and the very strange formula | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Advances in Mathematics | 6. 最初と最後の頁 107567 ~ 107567 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107567 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 5件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 島倉裕樹 |
| 2. 発表標題 On automorphism groups of the holomorphic VOAs associated with Niemeier lattices and the -1-isometries |
| 3. 学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Shimakura |
| 2. 発表標題 Monster group and the Moonshine vertex operator algebra |
| 3. 学会等名 Bilateral Workshop 2019 between NTHU and GSIS (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Shimakura |
| 2. 発表標題 On inertia groups and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 |
| 3. 学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics in Kumamoto (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroki Shimakura |
| 2. 発表標題 On automorphism groups of holomorphic VOAs of central charge 24 |
| 3. 学会等名 Workshop on finite groups, vertex algebras and algebraic combinatorics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--------------------------------------|
| 1. 発表者名 島倉裕樹 |
| 2. 発表標題 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類について |
| 3. 学会等名 第63回代数学シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名 島倉裕樹 |
| 2. 発表標題 リーチ格子頂点作用素代数と軌道体構成法 |
| 3. 学会等名 第30 回有限群論草津セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 島倉裕樹 |
| 2. 発表標題 Orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra |
| 3. 学会等名 代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 H. Shimakura |
| 2. 発表標題 Orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra |
| 3. 学会等名 One day workshop on VOA（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2017年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|--------------|---------------------------------|--|--|--|
| その他の国・地域（台湾） | Academia Sinica（台湾） | | | |
| ブラジル | Universidade Federal Fluminense | | | |
| 米国 | Rutgers University | | | |