様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ７ 月　 ７ 日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５１６０

研究課題名（和文）L-関数たちの集合に対するランダム配置と独立性の研究

研究課題名（英文）Study on random distribution and independence of L-functions

研究代表者
名越　弘文（Nagoshi, Hirofumi）

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：７０５７１１６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：L-関数たちの値分布論において，Voroninによって普遍性定理やもっと一般に同時普遍性定理と呼ばれる結果が得られている。本研究では，値分布の観点から，L-関数たちが互いにランダムに分布していることを示唆する様々な関連結果を得た。また，L-関数たちの独立性に関して，値分布論や一様分布論を使って，これまでに知られていた結果の拡張など新たな様々な結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学において，整数論と呼ばれる分野がある。その分野において，ゼータ関数やL-関数と呼ばれる関数たちの様々な性質を調べることは，非常に重要である。例えば，リーマン・ゼータ関数に対するリーマン予想と呼ばれる予想は，数学において最も重要な予想たちの一つであると認識されている。本研究では，そのような関数たちに対して，値分布の観点から，互いのランダムな関係を意味する様々な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In the theory of value-distribution of L-functions, Voronin discovered the so-called universality theorem and more generally joint universality theorem. We obtain various related results, which mean that L-functions are randomly distributed, from the view point of distribution of their values. We also various results on the independence of L-functions, using the theory of value-distribution of L-functions and the theory of uniform distribution. Some of these results are generalizations of previous ones.

研究分野：解析的数論

キーワード：L-関数　普遍性定理　関数的独立性　値分布　レルヒ・ゼータ関数　セルバーグ・クラス

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ゼータ関数や L-関数と呼ばれる関数たちに対する値分布の研究において，Voronin によって，リーマン･ゼータ関数に対していわゆる普遍性定理と呼ばれる結果が得られた。さらに，Voronin などによって，１つだけでなく複数個のディリクレ L-関数たちに対して，同時普遍性定理と呼ばれるもっと強い結果が得られた。この結果は，L-関数たちが互いにランダムな関係であることを示唆する。また，値分布に関するこれらの結果は，Hilbert によって得られていたリーマン・ゼータ関数に対するある独立性の結果の別証明を生み，さらには，ディリクレ L-関数たちに対する関数的独立性の結果を生み出すという興味深い応用が知られていた。

２．研究の目的

上記に述べた普遍性定理や同時普遍性定理と呼ばれる結果は，これまでほとんどが t-aspect と呼ばれる場合である。解析的数論においては，L-関数を個々に扱うだけでなく，L-関数たちの集合を扱うことが重要であるということが認識されている。このことを踏まえて，t-aspect 以外の場合の結果を新たに得ることや，L-関数たちが互いにランダムに分布していることを示唆する結果を得ることを，本研究の目的とする。関連して，L-関数たちの独立性に関する様々な結果を得ることも，本研究の目的とする。

３．研究の方法

Voronin によって得られたリーマン・ゼータ関数に対する普遍性定理は，その後，様々な研究者たちによって，他の関数たちの場合に拡張されまた別証明を得るなどの研究がなされた。その中でも特に，Bagchi は，付随する適当な確率分布に対する考察を行うことにより，普遍性定理に対する新たな証明を得た。Bagchi の手法を参考にしながら，研究を行う。また，L-関数たちの独立性に関する研究については，Hilbert によって得られたリーマン・ゼータ関数に対するある独立性の結果以降，様々な別証明や手法が考え出されている。その中でも特に，Voronin と Reich による値分布を使った証明を参考にしながら，研究を行う。

４．研究成果

(1)　リーマン・ゼータ関数や L-関数たちの値分布論において，普遍性定理やさらに強くした同時普遍性定理と呼ばれるものが知られている。実指標を動かした場合における複数個のある L-関数たちの同時普遍性の結果を共同研究により研究代表者らは得ていた。この結果は，それらの L-関数たちがある種のランダム性を持つことを意味している。その論文を作成する中で，さらに関連する結果を共同研究により付け足すことができた。

(2) レルヒ・ゼータ関数たちのある集合に対して，同時値分布とその応用としての関数的独立に関する結果を研究代表者は以前に得ていた。もっと広い集合に対して同様な結果を得ることでき，よって，以前の結果を拡張したものを得ることができた。

(3) 上記の普遍性定理は，臨界領域内の右半分の領域における話であり，その定理からある関数空間における稠密性が得られる。その稠密性あるいは逆に非稠密性が他の領域たちではどうなっているのかは，興味深い話である。リーマン・ゼータ関数とその導関数たち，さらにはもっと一般の L-関数とその導関数たちに対して，ある関数空間における稠密性と非稠密性の結果を共同研究により得ることができた。

(4) ディリクレ級数たちの独立性に関する研究として，リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の代数的差分微分独立性に関する成果を得た。ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有理関数体上で代数的微分独立性を満たす（すなわち，どんな代数的微分方程式も満たさない）ということを，1900 年に Hilbert が示した。その一般化として，代数的差分微分方程式の場合の研究が行われてきた。ここでの差分とは，$\zeta(s+s_1),\ldots,\zeta(s+s_r)$（導関数たちに対しても同様）という形を扱うことを意味する。例えば，1920 年に Ostrowski が，相異なる任意の実数たち $s_1,\ldots,s_r$ の場合に独立性を得た。1986 年に Shapiro と Sparer が，ある行列式を計算することによって，実部たちが相異なる任意の複素数たち $s_1,\ldots,s_r$ の場合に独立性を得た。それらの結果を拡張し，相異なる任意の複素数たち $s_1,\ldots,s_r$ という最も緩い条件で独立性を示した。

(5)　一様分布する数列に対する適当なディリクレ級数たちの関数的微分独立性に関する結果を，値分布の観点から証明した。具体例として次が挙げられる。SL(2,Z)の正則 Hecke 固有尖点形式 f に対して，Sato-Tate 予想が証明されているが，f に付随する対称積 L-関数たちとそれらの導関数たちに対してある関数的独立性を得た。

(6) セルバーグ・クラスに属する一般の関数たちに対して，代数的独立性は必ずしも成り立たない。どのような条件が成り立つときにそのような独立性やもっと強い独立性が成り立つのかを考察した。セルバーグ・クラスに属する原始的な関数たちに対するセルバーグによるある予想を仮定したときに，一般の関数たちは原始的な関数たちに分解される。その予想を仮定したとき，

一般の関数たちに対して，ある条件において代数的微分独立性が成り立つことを証明した。

(7) 研究代表者は，2019 年に出版された論文において，あるクラスのレルヒ・ゼータ関数たちについて値たちの稠密性の結果を得た。その結果に関連して，同じクラスのレルヒ・ゼータ関数たちに対し Voronin の意味での同時普遍性定理の結果を得た。この結果は，これまでに知られていたいくつかの関連結果たちを拡張したものになっている。

(8) リーマン・ゼータ関数に関連するある関数たちに対して，臨界線上の値たちの同時稠密性に関するある結果を共同研究により得た。また，類似の結果が，もっと一般にセルバーグ・クラスに属する関数たちに対して成り立つのかを考察した。その結果，適当な仮定の元で，類似だけでなくもっと強いある同時稠密性が成り立つことを示した。

(9) リーマン・ゼータ関数や関連する一般の L-関数たちに対しては，一般リーマン予想が成り立つことが予想されており，これまでに様々な結果が知られている。研究代表者は，1 つの L-関数に対する一般リーマン予想ではなく，L-関数たちの適当な集合に対して関連することを考察した。その集合に属するすべての L-関数たちに対して一般リーマン予想が成り立つという命題について，その集合に属する L-関数たちとの互いの関連の視点で同値な命題を得た。その証明においては，同時普遍性定理などを使う。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 Hirofumi Nagoshi, Takashi Nakamura	４．巻 241
２．論文標題 Non-universality of the Riemann zeta function and its derivatives when σ≧1	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Approximation Theory	６．最初と最後の頁 57～62
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jat.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hirofumi Nagoshi	４．巻 59
２．論文標題 On a certain set of Lerch’s zeta-functions and their derivatives	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Lithuanian Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 111～130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10986-019-09433-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hirofumi Nagoshi	４．巻 2131
２．論文標題 The Sato-Tate conjecture and functional differential independence of symmetric power L-functions	５．発行年 2019年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 71～76
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 Hirofumi Nagoshi
２．発表標題 The Sato-Tate conjecture and functional differential independence of symmetric power L-functions
３．学会等名 Analytic Number Theory and Related Topics（招待講演）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考