

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 22 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05163

研究課題名(和文)ゼータ関数から派生する関数空間の諸性質の研究

研究課題名(英文)Research on properties of function spaces derived from various zeta functions

研究代表者

鈴木 正俊 (Suzuki, Masatoshi)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：30534052

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：整数論における重要な研究対象であるゼータ関数、L関数について、零点分布をはじめとした重要な解析的性質を解明するために、それらを特定の関数空間およびその上の作用素の諸性質と関連付ける研究を行った。また、そのような関連付けを行うための基礎として、正準系と呼ばれる常微分方程式系のスペクトル逆問題の解法についての研究を行った。一つの成果として、ゼータ関数、L関数の零点分布と正準系のハミルトニアンを関連付ける新しい理論を構築することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

既に多くの例が示しているように、数学の異なる分野に属す対象たちに新たな関係性を見出すことは、未解明の問題の解決や新しい分野の開拓に繋がるなど、大きな意義を持つことが多い。この意味で、本研究において整数論におけるゼータ関数論と、関数解析学における正準系の理論の新しい繋がりが確立されたことは、学術的に大変有意義であったと考えられる。また、上記の関係性を確立する過程で得られた正準系のスペクトル逆問題の解法は、それ単独で解析学の発展に資するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：Zeta functions and L-functions are important research subjects in number theory. To elucidate their important analytic properties such as the distribution of zeros, we tried to relate them to specific function spaces and the properties of operators on them. In preparation for building such relations, we studied the solution of spectral inverse problems for systems of ordinary differential equations called canonical systems. As a result, we establish a new theory that relates the distributions of zeros of zeta functions to the Hamiltonian of canonical systems.

研究分野：整数論

キーワード：ゼータ関数 L関数 正準系 逆問題 自己相反多項式 screw関数

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数の解析的理論は19世紀のRiemann以来、長らく整数論の大きな研究領域であり続けてきた。しかしながら、クレイ数学研究所のミレニアム懸賞問題の一つであるRiemann予想に代表されるように、ゼータ関数の解析的性質のなかでも零点に関わる性質は、現代でも未解明の部分が多く残されている。この状況はRiemannゼータ関数の一般化として導入された種々のゼータ関数・L関数についても同様である。

このような状況のなか、2006年、J.C. LagariasはRiemannゼータ関数に対してRiemann予想が成り立つという仮定のもとで、整関数が成すあるヒルベルト空間と、その空間上の自然な作用素であって、Riemannゼータ関数の非自明零点を固有値に持つものを構成した。そして、このヒルベルト空間が正準系と呼ばれる線形常微分方程式系により統制されることに着目し、その正準系を特徴付けるハミルトニアンと呼ばれる量をRiemann予想を仮定せずに直接構成することにより、ゼータ関数の零点を研究する方針を示唆した。しかしながら、このような空間を統制する正準系のハミルトニアンを具体的に決定することは逆問題の一種であるため解決が困難であり、これがLagariasの示唆を実行する障害となっていた。

研究代表者は本課題以前からゼータ関数の解析的理論に取り組んできており、関数解析的手法を利用した研究の実績があった。特に2012年に部分的ではあるものの、Lagariasの示唆に沿った研究成果を得ていた。これらの実績と経験を生かして関数解析的な手法による研究を推し進めることにより、ゼータ関数の零点をはじめとした解析的理論に新たな知見が得られることが期待された。

2. 研究の目的

Lagariasの示唆した方針でゼータ関数を研究する際の大きな障害であった正準系の逆問題の解法という困難を克服し、関数空間の理論をゼータ関数の零点などの解析的性質の研究に応用するのが本課題の目的であった。いっぽう、正準系は解析学におけるいくつかの重要な微分方程式の一般形でもあるため、その逆問題の新しい解法は、それ自身が関数解析学において重要かつ有用な成果であると考えられる。この理由により、正準系の逆問題の新しい解法を開発すること自身も本研究課題の目的の一つであった。

3. 研究の方法

前項で述べた目的へ直接用いるのに適当な逆問題の解法は知られていなかったものの、L. de Brangesによる逆問題の解法や、J.-F. Burnolのハンケル作用素を用いたハミルトニアンの構成法などのように、参考にできる理論は幾つか存在していた。そういった理論への理解を深め、必要に応じて適切な一般化を行うことにより、上述したゼータ関数に付随する整関数の成すヒルベルト空間を統制する正準系のハミルトニアンを構成した。また、その構成法から分かるハミルトニアンの性質をゼータ関数の理論に応用した。

このようなことを行うには、正準系とは限らない線形常微分方程式系について類似の逆問題を考察し、それを解く手法を開発することが必要であった。そこで、従来の正準系の枠組みを若干広げることも行った。

4. 研究成果

- (1) ゼータ関数の研究へ正準系の理論を応用する準備段階の一つとして、実数係数の自己相反多項式から生ずる指数多項式に対して、正準系を一般化した擬正準系を対応させることを行った。そして、そのような擬正準系を特徴付けるハミルトニアンを、与えられた自己相反多項式から構成する逆問題を考察し、その解法を一つ与えた。
- (2) ゼータ関数の研究へ正準系の理論を応用する準備段階の一つとして、幾つかの条件を満たす整関数に対して適当な擬正準系を対応させ、そのような擬正準系を特徴付けるハミルトニアンを与えられた整関数から構成する逆問題を考察し、その解法を一つ与えた。この成果は(1)の解法を「連続化」したものとみなされる。

- (3) まず、Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数などの代表的ゼータ関数を含む Selberg クラスに属すゼータ関数であって、自己双対な関数等式を持つものが与えられたとき、(2)で述べた条件を満たす整関数の族が得られることを示した。これにより(2)で課した条件を満たす整関数は十分多く存在することが示されたことにもなる。さらに、上記のようにして得られた整関数に対応する擬正準系のハミルトニアンの構成法を利用して、Selberg クラスに属すゼータ関数で、自己双対な関数等式を持つものに対し、Riemann 予想が成り立つことの新しい同値条件を与えた。この成果によりゼータ関数の理論と正準系の理論の間に明確な関連があることが明らかにされたと言える。
- (4) 正準系と関連した事柄の一つに screw 関数の理論がある。Screw 関数は古典的には螺旋の弦の長さを与える関数であり、正定値関数の理論とも関係が深い。本研究でゼータ関数と正準系の関連を探る中で、これまでまったく気付かれていなかったゼータ関数の理論と screw 関数の理論の関係が発見された。最初の成果として、Riemann ゼータ関数から定められるある実軸上の関数が screw 関数であることと、Riemann 予想が成り立つことは同値なことが示される。この結果を用いると、シュワルツ超関数を用いて定式化される Riemann 予想の Weil の規準の類似を、通常関数(それどころか連続関数)の範囲で定式化することができる。この他にも、Riemann 予想の Li の規準の定式化に用いられる Li 係数と呼ばれる数列について、ヒルベルト空間のノルムという新しい解釈を与えることが可能になる。本研究で発見されたゼータ関数と screw 関数の繋がりは、今後より多くの新しい発見へ繋がるものと期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Suzuki Masatoshi	4. 巻 108
2. 論文標題 Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta function	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1448 ~ 1487
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12785	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Suzuki Masatoshi	4. 巻 252
2. 論文標題 Li coefficients as norms of functions in a model space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 177 ~ 194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2023.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takashi, Suzuki Masatoshi	4. 巻 201
2. 論文標題 On infinitely divisible distributions related to the Riemann hypothesis	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 109889 ~ 109889
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2023.109889	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatoshi Suzuki	4. 巻 74
2. 論文標題 An inverse problem for a class of lacunary canonical systems with diagonal Hamiltonian	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 549-568
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatoshi Suzuki	4. 巻 281
2. 論文標題 Hamiltonians arising from L-functions in the Selberg class	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 109116
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2021.109116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masatoshi Suzuki	4. 巻 279
2. 論文標題 An inverse problem for a class of canonical systems having Hamiltonians of determinant one	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108699
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2020.108699	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatoshi Suzuki	4. 巻 84
2. 論文標題 Integral operators arising from the Riemann zeta function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 399-411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatoshi Suzuki	4. 巻 136
2. 論文標題 An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathématique	6. 最初と最後の頁 273, 340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11854-018-0061-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件(うち招待講演 8件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 Aspects of the screw function of the Riemann zeta-function including value-distribution
3. 学会等名 Universality, Zeta-Functions, and Chaotic Operators (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 On the screw function of the Riemann zeta function
3. 学会等名 Number Theory and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 On the screw function of the Riemann zeta function
3. 学会等名 数理研究集会「解析的整数論とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 On canonical systems related to roots of polynomials
3. 学会等名 The 10th Pan Asian Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 On polynomial roots and canonical systems
3. 学会等名 The 13th International Symposium on Natural Sciences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木正俊
2. 発表標題 Schur-Cohn の判定法と関連する正準系について
3. 学会等名 数理研究集会「解析的整数論とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木正俊
2. 発表標題 L 関数から生ずる正準系について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木正俊
2. 発表標題 2次元正準系の逆問題の具体例について
3. 学会等名 第14回ゼータ若手研究集会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 Canonical systems arising from zeta-functions
3. 学会等名 数理研究集会「解析的整数論の展望と諸問題」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鈴木正俊
2. 発表標題 ある偏微分方程式系とHermite-Biehler class の整関数
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鈴木 正俊
2. 発表標題 ゼータ関数から生ずる積分作用素の族について. II
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 鈴木 正俊
2. 発表標題 ある偏微分方程式系とHermiteBiehler class の整関数
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masatoshi SUZUKI
2. 発表標題 Integral operators arising from zeta functions
3. 学会等名 Value distribution of zeta and L-functions and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 Canonical systems arising from zeta-functions
3. 学会等名 Hilbert spaces of entire functions and their applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masatoshi Suzuki
2. 発表標題 De Branges spaces associated with zeta-functions
3. 学会等名 Various Aspects of Multiple Zeta Functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木正俊
2. 発表標題 ゼータ関数から生ずる積分作用素の族について
3. 学会等名 日本数学会2018 年度年会,
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Masatoshi Suzuki
<https://sites.google.com/view/msuzuki/home>
(旧 <http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/index.html>)
研究代表者の研究成果等に関するwebページ

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Analytic Number Theory and Related Topics	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Analytic Number Theory and Related Topics	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Various Aspects of Multiple Zeta Functions	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------