

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05165

研究課題名(和文) アソシエーション・スキームのモジュラー表現と標準加群の研究

研究課題名(英文) Reseach on modular representations and standard modules of association schemes

研究代表者

花木 章秀 (Hanaki, Akihide)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：50262647

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)： p は素数、 F は標数 p の体とし、 F 上の表現を考える。 p -スキームの標準加群は直既約であることを示した。ランク 2 のアソシエーションスキームを繰り返し積をとったものを考え、その標準加群の直既約分解を求めた。シュアー的なアソシエーションスキームの標準加群が直既約であることと、アソシエーションスキームが p -スキームであることが同値であることを示した。これはシュアー的でないときには成り立たない結果である。また隣接代数の中心化環を二回とったものを考え、ランクが高々 3 であるときには常に元の隣接代数に一致することを示した。ランクが 3 より大きい場合には一致しない例があることも示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アソシエーションスキームは代数的組合せ論の中心的な研究対象である。この分野では考える対象のサイズが大きくなるとその構造は極めて難しくなる。そこでやや情報を落として、その隣接代数とその表現を考える「表現論」が有効になる。このときに「どの程度情報が保たれるか」を考えることは重要である。考える体が複素数体であるときにはこれまでも多くの研究があるが、正標数の体上の研究は少ない。本研究では正標数の体上の表現を研究し、特にその直既約分解に関する多くの結果を得た。得られた結果はこれまでにない、新しい内容のものである。表現に研究において、その直既約分解は基本的であり、今後の更なる研究と応用に期待したい。

研究成果の概要(英文)：Let p be a prime, F a field of characteristic p . We consider representations over F . We proved the standard module of a p -scheme is indecomposable. We decided the indecomposable decomposition of an association scheme obtained by repeated wreath products of class 2 association schemes. For a schurian scheme, we proved that the standard module is indecomposable if and only if the scheme is a p -scheme. This is not true for non-schurian schemes. We considered the double centralizer of the adjacency algebra in the full matrix algebra, and proved that the double centralizer is equal to the adjacency algebra if the rank of the scheme is at most 3. We also gave examples such that the double centralizer is not equal to the adjacency algebra of a scheme of rank greater than 3.

研究分野：代数学

キーワード：アソシエーションスキーム モジュラー表現 標準加群

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

アソシエーションスキームは代数的組合せ論の中心的な研究対象である。この分野では考える対象のサイズが大きくなるとその構造は極めて難しくなる。そこでやや情報を落として、その隣接代数とその表現を考える「表現論」が有効になる。このときに「どの程度情報が保たれるか」を考えることは重要である。特に代数的に同型なアソシエーションスキームについては、その隣接代数は完全に一致し、それらを区別することはできない。そこで隣接代数が自然に定義する標準加群に注目する。複素数体上では標準加群も自然に同型となってしまうが、正標数の体では非同型となることがある(花木-吉川 2005)。したがってこの場合を深く考察することが重要と思われるが、やや議論が難しく、これまでほとんど手が付けられていなかった。

2. 研究の目的

アソシエーションスキームの正標数の体上での標準加群の構造および性質を調べ、その応用を探ることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

まず具体例を計算する。この際、計算機も積極的に利用する。具体例から一般的な性質を予想し、その証明を試みる。この過程で得られる事実、疑問などを解明するため、更に具体例の計算を行い、これらの繰り返しで研究を推進する。

4. 研究成果

p は素数、 F は標数 p の体とし、アソシエーションスキームの F 上の表現を考える。

- (1) p -スキームの標準加群は直既約であることを示した。すべての p -スキームはある p -スキームの分解として得られる。その p -スキームの標準加群が直既約であることを示し、結果としてすべての p -スキームの標準加群が直既約であることが示された(島袋修との共同研究)。
- (2) ランク 2 のアソシエーションスキームを繰り返しレス積をとったものを考え、その標準加群の直既約分解を求めた(島袋修との共同研究)。考えるアソシエーションスキームは比較的簡単なものであるが、代数の次元はいくらでも大きくとることができ、その分解も複雑になる。このような例を具体的に決定した結果はこれ以前にはなく、新しい意義のある結果であるといえる。
- (3) シュアー的なアソシエーションスキームに対して、その標準加群が直既約であることと、アソシエーションスキームが p -スキームであることが同値であることを示した。証明には標準加群の直既約分解が用いられている。これはシュアー的でないときには成り立たない結果である。
- (4) 隣接代数の中心化環を二回とったものを考え、ランクが高々 3 であるときには常に元の隣接代数に一致することを示した。この性質はアソシエーションスキームがシュアー的であるときには常に成り立つが、ランクが 3 より大きい場合には一致しない例があることも示した。この結果は与えられたアソシエーションスキームがシュアー的であるかどうかを判定する際に役立つと思われる。

研究主題とは直接的な関係はないが、アソシエーションスキームに関する以下の結果も得た。

- (5) Tamaschke の問題 (1969) に、具体的な判例を示すことによって、否定的な回答を与えた。
- (6) 可換なアソシエーションスキームの Frame 数と有理数体上の隣接代数の構造の間の関係を与えた。この結果によって可換なアソシエーションスキームの指標の値についての制限が与えられ、その存在の可能性などに応用される。
- (7) 位数 32 の歪アダマール行列、および位数 31 のアソシエーションスキームの分類をした(H. Kharaghani, A. Mohammadian, B. Tayfeh-Rezaie との共同研究)。位数 31 のアソシエーションスキームの同型類は 98307 個存在する。これによって位数 34 までのすべてのアソシエーションスキームの分類が完了したことになる。
- (8) 二面体群と四元数群のような関係にあるアソシエーションスキームの無限系列を構成した(吉川昌慶との共同研究)。それらは非可換で、等しい指標表をもち、異なるシュアー指数をもつ。分解体も異なる。
- (9) モジュラー Terwilliger 代数を定義しその基本的な性質を調べた。アソシエーションス

キームの通常の Terwilliger 代数は複素数体上で考えられるが、正標数の体上でもそれは定義することができる。これをモジュラー Terwilliger 代数と呼ぶ。モジュラー Terwilliger 代数は基点の取り方で次元が変わることがあるが、整数環上での Terwilliger 代数を考察することによってその意味を解明した。ある条件の下で、半単純代数にはならないことも示した。

- (10) 偶数ランクの基本アーベル群上にたくさんの非シュアー的なシュアー環を構成した (平井拓人、I. Ponomarenko との共同研究)。非シュアー的なシュアー環は Wielandt (1964), Evdokimov-Ponomarenko (2001) など与えられているが、その数は少ない。この結果では個数が基本となる群の位数の指数関数で与えられるような、大量の非シュアー的なシュアー環を構成した。これは同時に非シュアー的なアソシエーションスキームを構成していることになる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hanaki Akihide, Kharaghani Hadi, Mohammadian Ali, Tayfeh Rezaie Behruz	4. 巻 28
2. 論文標題 Classification of skew Hadamard matrices of order 32 and association schemes of order 31	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Designs	6. 最初と最後の頁 421 ~ 427
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jcd.21706	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hanaki Akihide	4. 巻 564
2. 論文標題 Double centralizers of association schemes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 1 ~ 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.11.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hanaki Akihide	4. 巻 114
2. 論文標題 Frame numbers, splitting fields, and integral adjacency algebras of commutative association schemes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 259 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-019-01389-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hanaki A.	4. 巻 234
2. 論文標題 Tamaschke 's Results on Schur Rings and a Generalization of Association Schemes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 248 ~ 255
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10958-018-4000-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide	4. 巻 111
2. 論文標題 Indecomposability of modular standard modules of schurian association schemes and p-schemes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 43 ~ 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-018-1166-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide, Miyazaki Yasuaki, Shimabukuro Osamu	4. 巻 514
2. 論文標題 Modular representation theory of BIB designs	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 174 ~ 197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2016.10.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide	4. 巻 474
2. 論文標題 Simplicity of p -blocks of modular adjacency algebras of association schemes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 126 ~ 133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.11.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide, Shimabukuro Osamu	4. 巻 46
2. 論文標題 Indecomposable decompositions of modular standard modules for two families of association schemes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 445 ~ 453
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-017-0758-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide, Hirai Takuto, Ponomarenko Iliia	4. 巻 29
2. 論文標題 On a Huge Family of Non-Schurian Schur Rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/10696	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hanaki Akihide	4. 巻 37
2. 論文標題 Modular Terwilliger Algebras of Association Schemes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1521 ~ 1529
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02363-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hanaki Akihide, Yoshikawa Masayoshi	4. 巻 4
2. 論文標題 A construction of pairs of non-commutative rank 8 association schemes from non-symmetric rank 3 association schemes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 533 ~ 540
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.167	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 花木章秀
2. 発表標題 Frame numbers, splitting fields, and integral adjacency algebras of commutative association schemes
3. 学会等名 第 36 回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 花木章秀
2. 発表標題 Double centralizers of association schemes
3. 学会等名 第 35 回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 花木章秀
2. 発表標題 Double centralizers of association schemes
3. 学会等名 The 90th KPPY Combinatorics Seminar
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hanaki Akihide
2. 発表標題 Modular standard modules of association schemes
3. 学会等名 Workshop on Group Theory and Algebraic Combinatorics, Novosibirsk State University, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Classification of association schemes http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as/</p> <p>Classification of small association schemes https://zenodo.org/record/3627821</p> <p>GAP Package AssociationSchemes http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes/</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	University of Lethbridge			
中国	Anhui University			
イラン	IPM			
ロシア連邦	Steklov Mathematical Institute			