様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１３８０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ０５１６６

研究課題名（和文）種々の数論的対象から生ずる誤差項の平均値定理

研究課題名（英文）Mean Value theorems of error terms related to various objects in number theory

研究代表者
古屋　淳（Furuya, Jun）

浜松医科大学・医学部・教授

研究者番号：１０４１３８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：この研究課題においては、各種の数論的誤差項の平均値定理を取り扱った。それらの手法は既存の平均値定理の理論を、新しい型として定義した誤差項に対して適用することを想定したものが中心である。具体的には（１）既存の数論的関数の定義に種々の条件をつけて新たに関数を構成しその和公式の考察（２）前項（１）から生じる誤差項 E(x) の平均値定理の考察（３）既存、および（１）の誤差項 E(x) を含む広義積分の明示公式の導出および解析的性質の考察、を主に行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究においては、新たなる対象に対して既存の理論の適用がどこまで可能であるか、また、適用するためにはどのような条件が必要であるか・新たなる理論の構築が必要な箇所はどこであるかの考察を行った。この考察により古典的な理論や近年の理論の発展の再考察が行えたため新たなる理論への足掛かりができたと位置づけられるものであり平均値定理の発展に寄与できる・寄与できる可能性を含む研究といえるものである。

研究成果の概要（英文）：In this research, we treat the mean value theorems for several types of number-theoretic error terms. These methods in this research are mainly intended to apply the classical theory of the mean value theorem to error terms defined as new types. Specifically, (1) We first make new types of arithmetical functions, and consider the asymptotic formula of the sums of this kind of functions. (2) We consider the mean value formula of the function E(x), which is the error terms in the asymptotic formula in (1). (3) We consider the explicit formula and the analytic properties of the improper integral containing classical error terms, or E(x) defined in (1).

研究分野：整数論

キーワード：数論的誤差項　数論的関数　平均値定理　広義積分　漸近公式

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

　種々の数論的対象､特に数論的誤差項の平均値定理の研究は古くからの研究対象であり､また､近年でも研究が盛んにおこなわれている重要な研究分野である。それらの研究は古くからの研究結果の改良・得られた結果の見直しを行う事、古典的理論の新たなる対象への適用、適用の可能性の考察など、多岐にわたるものである。特に最近では「離散型平均値」や「連続型平均値」等の各種平均値の関連や平均値の漸近公式の導出・過去の結果の改良、等種々の研究が盛んにおこなわれている。これらの意味でこの平均値定理の研究は整数論研究における重要な項目であり重要な研究成果を含む分野と位置付けられるといえる。

２．研究の目的

　本研究課題においては、

目標１：数論的誤差項の種々の平均値定理の研究
目標２：数論的誤差項より生じる種々の関数の性質の解析の研究

等を大きな目標として掲げている。目標１はこれまでの平均値定理の研究における各種古典的理論の展開や近年での新理論の構築の結果を踏まえて、それをより一般的な設定への適用の考察を行う事・適用の可能性の考察を行う事を目標とする。それらの目標の遂行のためには新たなる理論の展開・既存の平均値定理の再考察（理論の限界性や特殊性の考察）も必要になることも想定できるためこの内容についての考察も行う。

　目標 2 については「誤差項を含む広義積分・ディリクレ級数の解析的性質の考察」を主として考えていく。これらの対象は例えば、該当のディリクレ級数はペロンの公式の立場からは「離散型平均値の生成関数」と位置付けられ、また、広義積分はディリクレ級数の明示公式と密接な関係がある、など、誤差項の平均値定理の考察においては重要な位置を占める研究対象であると考えられる。そのため、まずはそのような対象物に対して性質（解析的性質）を考えてから平均値定理への応用を考察しようとするものである。

　また、現在取り扱われている対象、例えば数論的誤差項やそれらのもととなる数論的関数・その和公式の考察も取り扱っていく必要性は想定できるため、そのような意味での「数論的誤差項の導出」もそれらの目標の中に組み入れていく。

３．研究の方法

「２．研究の目的」でも述べているが、本件研究課題では

課題１：種々の新しい数論的対象に関する平均値定理の考察
課題２：既存の平均値定理の改良の考察
課題３：種々の関連するディリクレ級数・広義積分の性質の考察

を行っていく。上記でも繰り返し述べているが、本研究の根幹は「古典論・既存の理論の新たなる対象への適用」「既存の結果や手法の改良のために必要な条件の考察・既存の理論の再構築の可能性の考察」および「関連する各種関数の性質の考察」である。従って、研究の方法は古典論の適用から始まり必要に応じてそれらの理論の再構築を行う、また、再構築の可能性を考察し必要に応じては新理論の展開を考えていく、という流れで研究を進めていくことを想定している。

４．研究成果

以下、本研究課題における研究成果を述べていく。

（１）自然数 k と互いに素な約数の最大数の平均について：自然数 n に対して、n の約数のうち k と互いに素な約数の最大数を表す数論的関数について、その関数の実数 r のべき乗に n の実数 σ のべき乗を重みとして乗じた関数の和公式の考察を行い、和公式を漸近公式として導いた。この研究は１９６０年代に Suryanarayana 氏により得られた $r=1$ の結果、およびその後の該当分野の研究の発展をもとに得られた結果である。この結果は既存の結果を、一般のべき乗へと拡張するという一般化に該当する研究であるが、 r と σ の関係によって漸近公式を分類するし該当の和公式の漸近公式における誤差項の表示に工夫を行うことが施されている。

この研究は学外研究者（山口大の南出氏・井川氏（当時）、名古屋大の谷川氏）と本研究代表者の共同研究として学会で発表を行ったものである。

（２）k と互いに素な最大公約数の二乗平均の誤差項について：（１）における「n の約数のうち k と互いに素な約数の最大数を表す数論的関数」について、k を素数 p に、 r を２に限定したもとで、その数論的関数の和公式を漸近公式として考え、その漸近公式中の誤差項のオメガ評価を考えた。誤差項のオメガ評価とは「その誤差項の評価の限界がどのくらいの大きさかを示すもの」である。一般的にオメガ評価はある点列においての挙動がある一定の評価を下回らないことを示して得られるがこの研究ではその点列を実数列から取り出すこと・その評価の限界を p のある種の関数として表現できることを導いた。そこでの手法は該当の数論的関数について r=1 のときの Joshi - Vaidya の手法（１９８１年）の適用、および、その手法の拡張を考えることによるものである。この研究は学外研究者（山口大の南出氏・中野氏（当時））と本研究代表者の共同研究として学会で発表を行ったものである。

（３）オイラー関数およびその拡張に対する和公式の漸近公式、および関連する誤差項を含む広義積分の解析：まずはオイラー関数の和公式の漸近公式における誤差項 E(x) に対して、その誤差項 E(x) に (log x)^j を乗じた関数を x^s で除した関数の広義積分の性質の解析を行った（j は非負整数、 s は複素変数）。広義積分の導出はまずは該当の積分の漸近公式を導きそれを広義積分まで拡張するという手法で行う。「j=0 かつ s=2」という先行研究に対して、「j=0 かつ s=3」「j=1 かつ s=2」等についての考察を行った。また、一般の複素変数 s についての考察を行うことも取り組んだが s（の実部が）がある程度大きい場合には j=0 については研究を進めることが出来た。この「s（の実部）がある程度大きい」という条件は広義積分の収束性の考察と関わってくるために付される条件であり、該当の広義積分の収束性の議論を合わせて行わなくてはいけないので本研究課題内ではここまでの研究となってしまっている。

　また、「オイラー関数の拡張について」は、オイラー関数の生成関数の微分化を考えそれらから生じる数論的関数の和公式の考察を行うこと・上記のオイラー関数の場合の広義積分の考察をそのような微分化に対して行うことを想定しての研究である。もともと、オイラー関数の生成関数はある種のゼータ関数の商で構成されるためその微分化は何通りか想定される。具体的には「どれを微分するか」「微分の組み合わせをどう考えるか」等である。１つの微分（分母を微分するか分子を微分するか）については、どちらかの微分は他方に帰着することの関連性を導けたのでその片方に対しての和公式の漸近公式を導くことが出来たがこの課題においても本研究課題内ではここまでの研究となってしまっている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Jun Furuya, Makoto Minamide T, Miyu Nakano	４．巻 52
２．論文標題 A note on the mean square of the greatest divisor of n which is coprime to a fixed integer k	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Indian Journal of Pure & Applied Mathematics	６．最初と最後の頁 990-1003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13226-021-00103-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 中野実優、古屋 淳、南出 真
２．発表標題 k と互いに素な最大公約数の二乗平均の誤差項について
３．学会等名 日本数学会中国・四国支部例会（岡山理科大学）
４．発表年 2020年

１．発表者名 南出真、古屋淳、谷川好男
２．発表標題 ゼータ関数の微分に関連した約数問題について
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会代数分科会（山形大学）
４．発表年 2017年

１．発表者名 井川祥彰、南出真、古屋淳、谷川好男
２．発表標題 k と互いに素な約数の最大数の平均について
３．学会等名 日本数学会中国・四国支部例会（山口大学）
４．発表年 2018年

１．発表者名 井川祥彰、南出真、古屋淳、谷川好男
２．発表標題 On the number of k-free integers ≦ x which are coprime to m
３．学会等名 日本数学会年会代数分科会（東京大学）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関