

令和 3 年 5 月 28 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05167

研究課題名(和文) 反復ガロア拡大の岩澤理論

研究課題名(英文) Iwasawa theory of iterated Galois extensions

研究代表者

水澤 靖 (Mizusawa, Yasushi)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60453817

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：特定の操作の反復で定まる数(漸化式で定まる数列など)には、様々な興味深い性質がみられることが多い。この研究課題では、特定の多項式にそれ自身を次々に代入して得られる多項式の根など、有理写像の反復合成から定まる数たちの性質を研究した。それらの数たちのなす代数体において、一意的な素因数分解の起こりにくさを表す「類数」が主な研究対象である。岩澤理論として研究を展開し、類数の2進的な増加が緩やかな具体例を豊富に発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有理写像の反復合成から定まる数の研究は、近年の数論的力学系の進展の中でも注目されている。一方、研究成果として得られた具体例は、比較的扱いやすい代数体の系列(p 進Lie拡大)を形成しており、そこでは非可換岩澤理論の発展が期待できる。副産物として、代数体の副 p ガロア理論の発展にも貢献した。数論的力学系と岩澤理論の両者を結びつける研究として意義があり、国際的にも、この方面への学術的興味の共有と促進に繋がることを期待している。

研究成果の概要(英文)：In mathematics, we often find various interesting properties of numbers which are obtained by iteration of a specific routine. In this research project, we study the properties of algebraic numbers which are zeros of iteration of some basic polynomial functions and rational functions, from a viewpoint of Iwasawa theory. A main object is the class number of a number field generated by such algebraic numbers. As a result, we obtain a number of explicit examples where the 2-adic growth of class numbers is not too fast.

研究分野：代数的整数論

キーワード：岩澤理論 ガロア理論 反復拡大

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

高次の代数体を制限分岐ガロア拡大として構成し、その数論的不変量を調べることは、代数的整数論の主要テーマの一つである。岩澤理論では \mathbb{Z}_p 拡大や他の p 進 Lie 拡大において、イデアル類群の p -シロー部分群が不分岐アーベル副 p ガロア群 (不分岐岩澤加群) として研究されている。その中で「総実な円分 \mathbb{Z}_p 拡大上の不分岐岩澤加群は有限 (即ち、類数の p 進的増大は有界)」と主張する Greenberg 予想は、現在でも重要な未解決問題の一つとして残っている。楕円曲線の等分点から構成される制限分岐 \mathbb{Z}_p 拡大においても同様の現象が観測されているが、その現象の解明に向けて、新しい視点からの研究が期待されていた。

2. 研究の目的

そこでこの研究課題では、そのような \mathbb{Z}_p 拡大が反復ガロア拡大であることに着目し、「Greenberg 予想型の現象は、反復構成される制限分岐ガロア拡大の性質に由来するものではないか？」という仮説を設け、その検証を軸として、より一般の制限分岐反復ガロア拡大での不分岐岩澤加群の調査を主目的とした。

3. 研究の方法

(1) 有理写像による反復拡大の構成

代数体 k と有理写像 f および点 b に対して、反復ガロア拡大 $K = k(f^n(b) | n=1, 2, 3, \dots)$ とその部分拡大列 $k_n = k(b_n)$ が定まる。この数列 $\{b_n\}$ は $f(b_{n+1})=b_n, b_0=b$ をみだす。この反復拡大で Greenberg 予想型の現象を期待するには、それらが制限分岐拡大 (分岐素点有限個) である必要があるため、有理写像が post-critically finite (どの臨界点 c でも $\{f^n(c) | n=1, 2, 3, \dots\}$ が有限集合) であるという仮説を設けたい。そこで基礎体 k を有理数体または虚 2 次体として、その条件に合う p 次有理写像 f を探索する。

(2) Fukuda の定理の有限次版

構成した反復拡大において、相対拡大 k_{n+2}/k_n が p^2 次巡回拡大ならば、そのイデアル類群の p 進的増大が調べやすいと考えられる。それを (1) の探索条件に含め、さらに、 \mathbb{Z}_p 拡大におけるイデアル類群の p 進安定条件を与えた「Fukuda の定理」を、一般の p^2 次巡回拡大に適用できる形に一般化することを試みる。

(3) 計算機による数値実験

条件に合う有理写像 f が見つかったとしても、それが複雑な形をしている場合がある。その f の PGL_2 共役は同じ反復拡大を定めるため、計算機を援用して、共役が簡素な形になるような PGL_2 の元を探索する。さらに、小さな n に対して k_n の類数を計算し、Greenberg 予想型の現象が起こりそうな状況を分類する。計算ソフトウェアには、主に PARI/GP を用いた。

(4) 副 p ガロア理論の応用

反復拡大が制限分岐副 p 拡大であるとき、それはある素点の有限集合 S に対して、最大 S 外不分岐副 p 拡大 k_S/k の部分拡大である。そのガロア群 $\text{Gal}(k_S/k)$ およびその部分商の構造から、反復拡大の岩澤加群を調べられる可能性がある。そのような分岐条件付き副 p 拡大の理論は、非アーベル岩澤理論や数論的トポロジーにおいても発展してきているため、その研究成果を応用する。

4. 研究成果

(1) Joukowski 写像から来る 2 進 Lie 反復拡大 (5 [論文] 3 件目 [発表] 4, 5, 6, 11, 12 件目)

有理写像 $f(x)=(x-x^{-1})/2$ および基本的な条件をみたす点 b から 2 次元 2 進 Lie 反復拡大 K/k を構成し、 k_{n+2}/k_n が 4 次巡回拡大になることが確認できた。さらに k が総実ならば、その中間 \mathbb{Z}_2 拡大の Greenberg 予想の下で、 K 上の不分岐岩澤加群が pseudo-null であることを示した。 k が有理数体であるときに、無条件に pseudo-null であるような b の具体例も発見した。このような結果が成り立つ背景には、「この f が 2 乗写像の PGL_2 共役であり、2 次の Rikuna 多項式を

与える写像である」という事実があることが、研究分担者らの協力によって判明した。

(2) ガウス数体上の反復拡大 (5 [論文] 5 件目 [発表] 4,7 件目)

ガウス数体上の良い有理写像を探索したところ、 PGL_2 変換などにより、Joukowski 写像の虚数倍に辿り着き、楕円曲線の 2 次自己準同型から得られることがわかった。基本的な条件をみたく b に対して基礎体 k を拡大すれば、そこから構成される反復拡大では k_{n+3}/k_n が 2 外不分岐 [2,4] 型アーベル拡大になることを示した。低次の中間体における具体的な数値計算から、Greenberg 予想に近い現象と遠い現象の両方を観測することができた。

(3) 2 次 Chebychev 多項式による反復拡大 (5 [論文] 1,7 件目 [発表] 2,8,9,13,14 件目)

円分 Z_2 拡大は 2 次 Chebychev 多項式 $f(x)=x^2-2$ と $b=0$ による反復拡大である。研究協力者は、この b を基本的な条件をみたく別の点に取り換えても、 k_{n+2}/k_n は 4 次巡回拡大であり、 K/k は 2 外不分岐 2 次元 2 進 Lie 反復拡大になることを示した。さらに、 k がある種の虚 2 次体であるとき、非アーベル岩澤理論の結果も援用することで、 K 上の不分岐岩澤加群が pseudo-null であることを示した。

(4) 判別式-7 の虚 2 次体上の反復拡大 (5 [発表] 15,16 件目)

判別式-7 の虚 2 次体の 1 点分岐 Z_2 拡大も、ある f と b による反復拡大であることが、虚数乗法論からわかる。この f の簡素な PGL_2 共役を発見し、基本的な条件をみたく別の b に対しても、 k を拡大すれば k_{n+2}/k_n が 4 次巡回拡大になることを示した。さらに数値実験により、Greenberg 予想型の現象がみられる明示的な具体例を発見した。

(5) Fukuda の定理の有限次版の一般化 (5 [論文] 1 件目)

岩澤の定理の p^2 次巡回拡大における類似 (類数の p 非加除性の遺伝) を示し、それを以上の研究成果を得るために用いた。その一般化である Fukuda の定理の有限次版が、Li, Ouyang, Xu, Zhang によって同時期に得られていたが、別証明を与えると同時に、 T -イデアル ray 類群に対する主張に一般化することができた。

(6) 中間 Z_p 拡大上制限分岐副 p 拡大 (5 [論文] 2,4,6 件目 [発表] 1,3,10 件目)

以上のように得られる反復拡大において、 p 上の分岐をどこまで制限できるかを調べたい。そのために、 p 上の分岐を中間 Z_p 拡大上で制限した副 p 拡大を研究した。特に、そのガロア群の Koch 型群表示を得ることができ、その系として、そのガロア群が p 進 Lie 群にならない (特に、反復拡大になりにくい) 条件を得た。Koch 型群表示の副産物として、幾つかの Greenberg 予想に関する結果 (自明な不分岐岩澤加群をもつ p 次巡回体 k を決定した Yamamoto の定理、Fukuda-Komatsu, Hachimori の定理の一部) の別証明も得られた。

(7) 展望

以上の研究成果では、 $p=2$ の場合に限っているとしても、明示的な具体例が豊富に得られている。より高度な岩澤理論の展開 (反復拡大における円単数の類似や、岩澤主予想との関連) には及ばなかったが、反復ガロア拡大は「樹木ガロア表現」の像としても研究されており、数論的力学系と岩澤理論とが結びついて発展してゆく可能性が感じられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yasushi Mizusawa, Kota Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 On p-class groups of relative cyclic p-extensions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00013-021-01619-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Abdelaziz El Habibi, Yasushi Mizusawa	4. 巻 -
2. 論文標題 On pro-p-extensions of number fields with restricted ramification over intermediate \mathbb{Z}_p -extensions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2020.12.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yasushi Mizusawa, Kota Yamamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 On 2-adic Lie Iterated Extensions of Number Fields Arising from a Joukowski Map	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasushi Mizusawa, Gen Yamamoto	4. 巻 86
2. 論文標題 Iwasawa invariants and linking numbers of primes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 639-654
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08610639	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Mizusawa, Kota Yamamoto	4. 巻 96
2. 論文標題 Iterated towers of number fields by a quadratic map defined over the Gaussian rationals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 63-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.96.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Mizusawa	4. 巻 372(10)
2. 論文標題 On pro-p link groups of number fields	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 7225-7254
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7787	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yamamoto Kota	4. 巻 209
2. 論文標題 On iterated extensions of number fields arising from quadratic polynomial maps	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 289-311
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2019.08.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件(うち招待講演 4件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Abdelaziz El Habibi, 水澤靖
2. 発表標題 代数体の中間 \mathbb{Z}_p 拡大上馴分岐副 p 拡大について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kota Yamamoto
2. 発表標題 Class number parity of some iterated towers of number fields
3. 学会等名 3rd International Congress Algebra, Number Theory and Applications, Oujda, Morocco (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasushi Mizusawa
2. 発表標題 On pro-p-extensions of number fields cyclotomically ramified at p
3. 学会等名 HIT Summer Program on Number Theory and Related Topics, Program on Galois Structures in Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasushi Mizusawa
2. 発表標題 On iterated extensions of number fields by quadratic rational maps
3. 学会等名 HIT Summer Program on Number Theory and Related Topics, Program on Explicit Arithmetic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本 康太
2. 発表標題 2次有理写像による代数体の反復拡大について
3. 学会等名 第27回整数論サマースクール宵の時間プログラム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 水澤 靖, 山本 康太
2. 発表標題 ジュ-コフスキー変換から生じる代数体の2進Lie反復拡大について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会代数学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 水澤 靖, 山本 康太
2. 発表標題 ガウス数体上定義された2次有理写像による代数体の反復拡大塔
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会代数学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 二次多項式写像から生じる代数体の反復拡大について
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 二次多項式写像から生じる代数体の反復拡大について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会代数学分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水澤靖
2. 発表標題 代数体の様々な分岐条件付き副p拡大について
3. 学会等名 「代数的整数論とその周辺」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 Iterated towers of number fields by quadratic rational maps
3. 学会等名 第12回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 2次有理写像による代数体の反復拡大について
3. 学会等名 2019早稲田整数論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 二次多項式写像から生じる代数体の反復拡大について
3. 学会等名 愛知数論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 二次多項式写像から生じる代数体の反復拡大について
3. 学会等名 野々市代数的整数論2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 2次有理写像による代数体の反復拡大について
3. 学会等名 「代数的整数論とその周辺」研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本康太
2. 発表標題 Iterated extensions of number fields by a quadratic rational map arising from a CM elliptic curve
3. 学会等名 第3回数理新人セミナー
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	山岸 正和 (Yamagishi Masakazu) (40270996)	名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授 (13903)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	山本 康太 (Yamamoto Kota)	名古屋工業大学・大学院生 (13903)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関