

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05171

研究課題名(和文) 頂点作用素代数のモジュラー線型常微分方程式を用いた分類理論の展開

研究課題名(英文) Vertex operator algebras and modular differential equations

研究代表者

永友 清和 (Nagatomo, Kiyokazu)

大阪大学・情報科学研究科・招へい准教授

研究者番号：90172543

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数の分類理論をモジュラー微分方程式を用いて実施した。また、モジュラー微分方程式の一般論をRankin-Cohen括弧式を用いて特徴付けることに成功した。頂点作用素代数をその指標で分類することができれば理想的であるが同じ指標を持ちながら同型でない例が知られている。そこで指標はモジュラー微分方程式の解空間の部分空間であることに着目して、指標の空間があるモジュラー微分方程式の解空間と一致するとの条件のもとで、分類の研究を実施した。これにより、極小模型、格子頂点代数の特徴づけを実現した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点作用素代数のモジュラー微分方程式を用いた分類は、国内外で前例がなく、その内容は高く評価されている。これは頂点作用素代数の理論において新しい研究分野を与え、多くの研究者が興味を持ち始めている。新しい研究分野を開拓することは困難を伴い、我々の研究成果がそれを与えたことは、国内外で広く認められた事実であり、今後、この分野に重要な影響を与えると考えられる。

研究成果の概要(英文)：We had worked on the classification problem of vertex operator algebras (simply VOAs). The sets of characters were expected to characterize VOAs. However, there are examples of VOAs whose have the same set of characters but they are not isomorphic. Therefore we intended the classification by using modular linear differential equations (MLDEs for short) since any set of characters of a VOA is a subspace of the space of solutions of an MLDE. We achieved the classification of the Virasoro VOA (the so-called the minimal model) under very mild conditions. Moreover, since it is very important to have a recipe to obtain MLDEs of higher order. We found that the Rankin-Cohen brackets give a general description of MLDEs. This result contributes to the theory of modular forms by giving a new differential operator which generalizes the Serre operation.

研究分野：頂点作用素代数の理論

キーワード：頂点作用素代数 モジュラー微分方程式 指標 分類理論 保型形式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初においては、基盤研究(C)(一般)の申請時に記述した研究内容はこの研究領域においてまだ手つかずの状態であった。しかし、そこで詳細に記述した研究目的を達成することは国内外で切望されていた。特にモニックなモジュラー微分方程式と頂点作用素代数との関係は報告者の先鞭をつけた研究領域であり、報告者の研究が推進されることが求められていた。とくに、アフィン頂点作用素代数、格子頂点作用素代数、極小模型頂点作用素代数など頂点作用素代数の古典例を頂点作用素代数のカテゴリーでモニックなモジュラー微分方程式を用いて特徴付けすることが切望されていた。

### 2. 研究の目的

頂点作用素代数の指標はモニックなモジュラー微分方程式の解空間の部分空間となる。研究の目的は、とくに、指標の空間が解空間と一致する場合をアフィン頂点作用素代数、格子頂点作用素代数、極小模型頂点作用素代数の場合に考察し、その既約表現の指標により特徴付けすることである。また、指標の空間の次元が小さい場合に色々な条件下で分類を試みることも目的とする。さらに、モジュラー微分方程式の新たな表示を得て、指標の空間の次元が高い場合にも取り扱いが可能にあるようにすることも重要な目的の一つである。

### 3. 研究の方法

頂点作用素代数の指標がモジュラー微分方程式の解であることに注目して、アフィン頂点作用素代数、格子頂点作用素代数、極小模型頂点作用素代数の場合と一般の頂点作用素代数にマイルドな条件を課してももの分類を実施した。研究の主要な方法は確定特異点型常微分方程式をフロベニウスの方法を用いて解くことである。計算機を援用し、解のフーリエ展開を求めることにより、モジュラー形式で記述される解を構成し、モジュラー形式の理論を援用して、Verlinde の公式に現れる  $S$ -行列、複素次元、大域次元を具体的に計算することができる。この計算結果はモジュラーなテンソル圏の例を与えるので、Verlinde の公式を頂点作用素の分類に応用することができる。

### 4. 研究成果

(a)アフィン頂点作用素代数、格子頂点作用素代数、極小模型頂点作用素代数の既約表現が3個である格子頂点作用素代数の分類を実施した。頂点作用素代数のモジュラー線型微分方程式を用いた分類を実施した。具体的には2, 3, 4個の既約表現をもつ極小模型を2, 3, 4階のモジュラー線型微分方程式によって特徴付けた。これにより、与えられた頂点作用素代数が極小模型と同型であるかどうか容易に判定できるようになった。

(b)3つの一次独立な指標をもつ頂点作用素代数でウェイトが1の空間が8次元あるいは16次元であるようなものを分類した。次元を1と16に焦点をしばつたのは、与えられた条件をみたく頂点作用素代数の例はそれ以外には知られていなかったからである。その結果として求める頂点作用素代数は既知の頂点作用素代数に同型であることを証明した。ウェイトが1の空間の次元のみで分類が行われる重要な成果である。さらに、

(c)極小模型頂点作用素代数の特別な場合は、伊吹山知義氏により構成された分数のウェイトをもつ保型関数の空間と一致することを示し、そのモジュラー微分方程式を構成することに成功した。モジュラー微分方程式は従来2つの表現形式しか知られていなかったが、申請者は境優一(九州大学)、Don Zagier(マックス・プランク数学研究所)と共同研究を行い、新しい表現形式を得た。

(d)頂点作用素代数の指標の集合から、 $S$  行列の情報を引き出す定理を証明した。これにより、ある関数系を指標とする頂点作用素代数が存在しないことを証明することができる。実際、特別な中心電化をもつ頂点作用素代数が存在しないことが証明された。この証明は真に独創的であり、今後、多くの関係領域の研究者に影響を与えるものと予想される。

上述の成果でもっとも重要な成果と考えられるのは極小模型頂点作用素代数の既約表現が4個以下の場合に特徴づけを得たことである。しかしながら、この場合の条件のもとでは、証明が困難であったので、確認が容易かつ証明もより簡潔な条件を与えることに成功した。また、既約表現の個数が5, 6個の場合にも特徴づけに成功している。証明には計算機を援用するのでメモリーの問題からこの場合が申請者の証明方法でのげんかいである。

また、次の重要な成果はモジュラー線型微分方程式の新しい定義を与えたことである。一般にモジュラー線型微分方程式は Serre 作用素も用いると簡潔に表示することができる。しかしながら、通常の微分を用いて記述することは Serre 作用素が一階の微分作用素であるので非常に困難である。最終年度の研究において、モジュラー形式の理論で広く知られている Rankin-Cohen 括弧式を用いてモジュラー線型微分方程式が表示されることを明らかにした。この研究は今後のモジュラー線型微分方程式の理論に重要な役割を果たすと考えられる。最後に、この兼1級はモジュラー微分方程式と頂点作用素代数、さらに、モジュラー形式の間の深い関係を掘り起こしている。

以上の研究成果の発表を ICTP(International Center of Theoretical Physics), Sapienza 大学 (イタリア), Emory 大学, Notre Dame 大学(米国)および四川大学(中国)でおこなった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai	4. 巻 70
2. 論文標題 Vertex operator algebras, minimal models, and modular linear differential equations of order 4	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1347, 1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/7495749	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai,	4. 巻 695
2. 論文標題 Lie algebras, vertex operator algebras, and related topics	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Contemp. Math	6. 最初と最後の頁 175, 204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, The third order modular linear differential equations, J. Algebra, $\text{\yen}{485}$ , 332--352 (2017).	4. 巻 485
2. 論文標題 The third order modular linear differential equations,	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Algebra,	6. 最初と最後の頁 332-352
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 K. Nagatomo
2. 発表標題 Modular liner differential equations
3. 学会等名 Vertex operator algebras and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Nagatomo
2. 発表標題 Modular forms of rational weights
3. 学会等名 Vertex Operator Algebras, Number Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考