

令和 3 年 6 月 15 日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05173

研究課題名(和文) 正則アソシエーション・スキームの表現の研究

研究課題名(英文) Research on representations of regular association schemes

研究代表者

吉川 昌慶 (Yoshikawa, Masayoshi)

兵庫教育大学・学校教育研究科・准教授

研究者番号：10757743

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究における主要な結果は以下の通りである。

1. 有限exponentをもつアソシエーション・スキームにおける、正則アソシエーション・スキームの高次指標による特徴付け。2. 有限群の表現論でよく知られている、次数2以上の既約指標の値に関するBurnsideの定理の正則アソシエーション・スキームへの拡張。3. 非対称ランク3アソシエーション・スキームから非可換ランク8アソシエーション・スキームの対の構成。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アソシエーション・スキームは有限群のある種の一般化であることから、有限群論における諸結果をアソシエーション・スキームに拡張する研究が多くなされている。しかし、その方向性を捉えることは容易ではない。そこで、本研究では有限群に近い性質をもつ正則アソシエーション・スキームの研究を通して、一般のアソシエーション・スキームへの拡張の示唆を得ることを期待するものである。

本研究の成果として、高次指標を導入することで、正則アソシエーション・スキームの表現論的な特徴付けが得られた。また、一般のアソシエーション・スキームでは反例のある、Burnsideの定理を正則アソシエーション・スキームにまで拡張できた。

研究成果の概要(英文)：The main results of this research are as follows:

1. A characterization of regular association schemes among finite exponent association schemes in terms of higher indicators. 2. An extension to regular association schemes of Burnside's vanishing theorem which is well known in the representation theory of finite groups. 3. A construction of pairs of non-commutative rank 8 association schemes from non-symmetric rank 3 association schemes.

研究分野：代数学

キーワード：正則アソシエーション・スキーム 代数的組合せ論 隣接代数

## 1. 研究開始当初の背景

アソシエーション・スキームは有限群のある種の一般化であることから、有限群の表現論で得られている結果をアソシエーション・スキームの隣接代数の表現に拡張する研究が多くなされている。しかし、どのような方向でアソシエーション・スキームに拡張できるかを捉えるのは容易ではなく、また、そのままでは成り立たない主張も存在する。そこで、有限群に近い性質をもつアソシエーション・スキームへの拡張を調査することによって、より一般のアソシエーション・スキームへの拡張の足掛かりとする研究が考えられる。本研究では、有限群に近い性質をもつアソシエーション・スキームとして、研究代表者によって定義された正則アソシエーション・スキームを用いることとした。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、有限群に近い性質をもつ正則アソシエーション・スキームの隣接代数の表現を考察することである。また、そこからより一般のアソシエーション・スキームへの拡張に対する示唆を得ることである。

## 3. 研究の方法

花木章秀氏(信州大学)によって公開されているアソシエーション・スキームおよびそれらの指標表のデータベースを利用し、GAPを用いた計算実験によって、データを収集する。また、そのデータから得られた予想を考察する。

正則アソシエーション・スキームの構造およびその隣接代数の表現を研究し、有限群の表現論の議論に帰着可能な手法を開拓する。

代数的組合せ論および代数学関連の研究集会に参加し、情報収集をする。特に、有限群論の研究者と意見交換を行い、知見を広める。

## 4. 研究成果

本研究における、主要な結果は以下の通りである。

### (1) 正則アソシエーション・スキームの高次指標による特徴付け

正則アソシエーション・スキームの exponent は有限である。しかし、有限 exponent をもつアソシエーション・スキームの中には正則でないものも存在する。本研究では、有限次元半単純ホップ代数の研究で用いられていた高次 Frobenius-Schur 指標および高次指標の定義を参考にし、アソシエーション・スキームの隣接代数の既約指標に対して、Higman による先行研究(2次 Frobenius-Schur 指標, 2次指標)を拡張し、高次 Frobenius-Schur 指標, 高次指標を定義した。簡単な計算から、この高次指標の値は常に有理数であることが分かる。また、有限群を含む正則アソシエーション・スキームにおいては、任意の高次指標の値は自然数であり、またその列は周期的であることも分かる。この論文では、このことが有限 exponent をもつアソシエーション・スキームのなかで、正則アソシエーション・スキームを特徴付けることを示した。つまり、有限 exponent をもつアソシエーション・スキームのなかでは、アソシエーション・スキーム  $S$  が正則であること、任意の自然数  $n$  に対して、 $n$  次指標の値  $v_n(S)$  が自然数であること、 $n$  次指標の値の列  $\{v_n(S)\}$  が周期的であることが同値であることを示した。さらに、任意の自然数  $n$  に対して、 $v_n(S)$  が自然数で、数列  $\{v_n(S)\}$  が周期的であるような無限 exponent をもつアソシエーション・スキームの無限系列を構成した。この例から、exponent が有限であるという条件は外せないことが分かる。

### (2) アソシエーション・スキームの正則な元の strong girth

アソシエーション・スキームの正則な元には、有限群の元の位数の概念に対応する、strong girth という概念がある。有限群の元の位数は、もとの群の位数を割る。本研究では、正則な元  $s$  で生成される閉部分集合  $\langle s \rangle$  を考察し、 $\langle s \rangle$  の thin residue は  $s^*s$  であり、それによる剰余スキーム  $\langle s \rangle / / s^*s$  は位数が元  $s$  の strong girth である巡回群と同型であることを示した。これにより、正則な元  $s$  の strong girth は、有限群の元の位数と同様、もとのアソシエーション・スキームの位数を割ることが分かった。このことから、正則アソシエーション・スキームの exponent は、そのアソシエーション・スキームの位数を割ることも分かる。

### ( 3 ) Burnside の定理の正則アソシエーション・スキームへの拡張

有限群の表現論において、「次数 2 以上の任意の既約指標  $\chi$  に対して、それぞれ  $\chi(g) = 0$  となる元  $g$  が存在する」という Burnside の定理がある。この定理は一般のアソシエーション・スキームの既約指標に対しては反例があることが知られていた。本研究では、「正則アソシエーション・スキームの重複度 2 以上の任意の既約指標  $\chi$  に対して、それぞれ  $\chi(\sigma_s) = 0$  となる元  $s$  が存在する」ことを示した。有限群をアソシエーション・スキームとみたとき、既約指標の次数と重複度は一致するため、有限群に対する主張は一致している。しかし、一般にアソシエーション・スキームの既約指標においては、次数は重複度以下であることから、より強い結果を得たことになる。

有限群の表現論において、Burnside の定理を用いて証明される Brauer-Wielandt-Harada の定理が知られている。この定理を群的な正則アソシエーション・スキームに拡張した。この結果は現在投稿中である。

### ( 4 ) 非対称ランク 3 アソシエーション・スキームから非可換ランク 8 アソシエーション・スキームの対の構成とその表現

花本章秀氏との共同研究として、非対称ランク 3 アソシエーション・スキームから同じ指標表をもつ非可換ランク 8 アソシエーション・スキームの対を構成した。これは、位数 8 の非可換群である四元数群と二面体群の關係に類似したランク 8 の非可換アソシエーション・スキームの対を、二面体群と任意の非対称ランク 3 アソシエーション・スキームから構成するものである。また、この対に対して、表現論的な特徴 ( Frobenius-Schur 指標, 有理数体上の隣接代数の代数構造 ) を調べた。本研究は Algebraic Combinatorics に掲載を受理された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yoshikawa Masayoshi	4. 巻 343
2. 論文標題 On closed subsets generated by a regular relation of an association scheme	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 111706
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2019.111706	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yoshikawa Masayoshi	4. 巻 341
2. 論文標題 On higher indicators of regular association schemes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2028 ~ 2034
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2018.04.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 吉川昌慶
2. 発表標題 Thin radicalとthin residueに関連するアソシエーション・スキームのある部分集合列について
3. 学会等名 第31回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉川昌慶
2. 発表標題 On the closed subset generated by a regular relation
3. 学会等名 第35回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉川昌慶
2. 発表標題 On Brauer-Wielandt-Harada theorem for group-like regular association schemes
3. 学会等名 第30回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉川昌慶
2. 発表標題 A generalization of Burnside's vanishing theorem to regular association schemes
3. 学会等名 第29回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	花木 章秀  (Hanaki Akihide)		
研究協力者	平坂 貢  (Hirasaka Mitsugu)		
研究協力者	島袋 修  (Shimabukuro Osamu)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------