

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05178

研究課題名（和文）擬尖点形式による跡公式の単純化と保型形式及びゼータ関数の研究

研究課題名（英文）Study of trace formulas, automorphic forms and zeta functions by using pseudo-cusp forms

研究代表者

権 寧魯 (Gon, Yasuro)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：30302508

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：擬尖点形式を用いて、関連する跡公式、保型形式とゼータ関数について研究を行った。得られた結果に基づき、分裂カルタン部分群の共役類に対応する、2次元平坦部分多様体を数える、階数2の群 $SL_3(\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理を証明した。また、ヒルベルトモジュラー群に対するセルバーグゼータ関数の導関数の零点分布に関していくつかの漸近公式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

素数定理のひとつの類似であり整数論や微分幾何学などで重要な研究対象である「素測地線定理」は、現在まで階数1の場合しか主に研究されてこなかった。今回、一つの目標であった「階数2の群に対するコンパクトでない場合の高階数のカルタン部分群に対応する素測地線定理」を初めて証明出来た意義は大きいと言える。また、特別な場合であるが、階数2の群に対する非コンパクトな場合のラプラシアンの特値や固有空間の次元の評価に必要なセルバーグ型ゼータ関数の導関数の非零領域についての評価が得られたので、他の階数2の場合への拡張が期待できると言える。

研究成果の概要（英文）：We studied trace formulas, automorphic forms and zeta functions by using pseudo-cuspforms. Based on our results, we proved a prime geodesic theorem for the group $SL_3(\mathbb{Z})$ those counting 2 dimensional flat submanifolds whose lifts lie in the split Cartan subgroup. Besides, we obtained several asymptotic formulas on the distribution of zeros of the derivatives of Selberg zeta functions for Hilbert modular surfaces.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 保型形式 ゼータ関数 跡公式 擬尖点形式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

保型形式の整数論においては、保型L関数の解析的性質や特殊値、保型形式の周期などの意味付けやそれらの相互の関係を調べることは大きな主題のひとつである。セルバーグ跡公式は保型形式やゼータ関数を研究するための強力な道具の一つであり、試験関数を選ぶことによって保型形式の整数論の研究にさまざまな応用がある。扱う群の階数が高い場合、セルバーグ跡公式自身が大変複雑な形をしており、直接には応用しにくい形をしている。現在、さまざまな方向への跡公式の単純化、一般化が研究されており、保型形式の整数論の研究において重要な役割を果たしている。本研究では、「擬尖点形式」という試験関数を用いた「跡公式の単純化」の理論の構築、更なる一般化やその分割・細分化の研究を行う。さらに、得られた「跡公式の単純化」に基づいた保型形式やゼータ関数の研究をすすめる。

2. 研究の目的

階数2以上の半単純リー群Gとその非コンパクトな離散部分群に対する跡公式の「擬尖点形式」を用いた「単純化・細分化」の研究を行う。コンパクトな場合とは異なり、跡公式の幾何学的辺に新たに放物共役類の寄与やアイゼンシュタイン級数の寄与が現れるが、これらの寄与を明示的に研究する。併せて関連する数論的研究を行う。

具体的には以下の(1),(2)について研究する。

(1) $SL(3, R)$ や $Sp(2, R)$ などの具体的な階数2の群に対して、「擬尖点形式」をラプラシアンなどの不変微分作用素から定まる「Kタイプ付き“熱核”の交代和」を用いて具体的に構成する。構成された「擬尖点形式」に対して、放物共役類の寄与であるユニポテント軌道積分や、ユニポテント重み付き軌道積分を計算する。次に、この「擬尖点形式」に対して、アイゼンシュタイン級数の寄与を計算する。特に、階数2以上の放物型部分群から定まるアイゼンシュタイン級数の寄与が消えることを確かめる。

(2) 上で求められた(階数2のカルタン部分群の正則元の共役類の寄与が消えた)非コンパクト跡公式の単純化を用いて、1変数のセルバーグ型ゼータ関数を定義し、研究する。次に数論的な応用を考察する。例えば、跡公式の単純化から得られるセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質を用いて、代数体や二次形式の類数の漸近的分布を研究する。また、保型形式の周期の分布と保型L関数の特殊値との関係などを調べる。

3. 研究の方法

(1) 先ず $SL(3, R)$ の場合を扱う。この群には共役でないカルタン部分群が2つあり、それぞれ階数1と2である。階数2のカルタン部分群上、軌道積分が消えるような試験関数である「擬尖点形式」を具体的に構成する。この新たに構成された「擬尖点形式」のユニポテント軌道積分や重み付き軌道積分のフーリエ変換を明示的に計算する。次に、この「擬尖点形式」に対して、アイゼンシュタイン級数の定数項からの寄与を計算する。特に、階数2の放物型部分群から定まるアイゼンシュタイン級数の寄与が消えることを確かめる。こうして求められた(階数2のカルタン部分群の正則元の共役類の寄与が消えた)非コンパクトな跡公式の単純化を用いて、1変数のセルバーグ型ゼータ関数を定義し、研究する。次に数論的な応用を考察する。例えば、離散部分群として $SL(3, Z)$ を取り、跡公式の単純化をより具体的に書き下し、跡公式の単純化から得られるセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質を用いて、代数体の類数や単数基準などの漸近的分布を研究する。また、保型形式の周期の分布と保型L関数の特殊値との関係などを調べる。次に、階数2の群 $Sp(2, R)$ または $SU(2, 2)$ の場合に同様の問題を扱う。ともにコンパクトカルタン部分群を持ち、それぞれ、共役でないカルタン部分群を4個、3個持つ。 $Sp(2, R)$ のカルタン部分群の階数は、0, 1, 1, 2であり、 $SU(2, 2)$ は0, 1, 2である。これらの群上の「擬尖点形式」を構成し、ユニポテント重み付き軌道積分のフーリエ変換を明示的に計算する。また、 $Sp(2, R)$ には階数1の共役でないカルタン部分群が二つあるので、これらのカルタン部分群上軌道積分が消えないことから、セルバーグ型ゼータ関数を構成する際、これらの共役類を分離できるか検討する。 $SU(2, 2)$ にはこの問題は発生しない。

(2) $SL(n, R)$ ($n > 3$) への拡張を研究する。共役でないカルタン部分群は $1 + [n/2]$ 個ある。まずは、 $SL(4, R)$ を扱う。カルタン部分群の階数は、1, 2, 3であり、階数2, 3のカルタン部分群の正則元上の軌道積分が消えるような「擬尖点形式」を不変微分作用素のKタイプ付き“熱核”の交代和を用いて具体的に構成する。(1)と同様に、「擬尖点形式」のユニポテント重み付き軌道積分のフーリエ変換を計算し、非コンパクトな跡公式の単純化を求める。その結果に基づいて1変数セルバーグ型ゼータ関数を定義し、解析的性質や数論的な応用を考察する。可能なら、 n が5以上の場合への一般化も視野に入れる。また、同様の問題を符号 $(2+, n-)$ の不定値特殊直交群 $SO(2, n)$ に対して考察する。

4. 研究成果

(1) 階数 2 の群の非コンパクトな離散部分群に対する素測地線定理について研究を行い、新たな結果を得た。高階数の群でも非コンパクトな離散部分群の場合は、階数 1 のカルタン部分群に対応する素測地線に関する素測地線定理については既にいくつかの場合に知られていたが、非コンパクトな離散部分群に対する高階数のカルタン部分群に対応する素測地線定理は今まで知られている例はなかった。具体的には階数 2 の群 $SL(3, \mathbb{R})$ の合同部分群に対して階数 1 のカルタン部分群の正則元上の軌道積分が消え、且つユニポテント重み付き軌道積分が消えるような「擬尖点形式」を構成することによって、ある種の跡公式の単純化を得た。この跡公式の単純化を用いてある 2 変数のディリクレ級数の解析的性質を調べることが可能となり、2 次元のカルタン部分群に対応する“素測地線”に対する素測地線定理を初めて得ることが出来た。特に、離散部分群として $SL(3, \mathbb{Z})$ を取ると、総実三次体の整環すべてに渡る類数と単数基準の積の和の漸近式を得ることが出来て、数論的にも非常に重要であると言える。証明のポイントは上記のある 2 変数のディリクレ級数に関して、これはセルバーグゼータ関数の対数微分の 2 変数類似とは形が少し異なるが、素測地線定理を得るには十分であるという点にある。しかしながら、今回得られた素測地線定理の誤差項を精密に評価するには、対応する 2 変数のセルバーグゼータ関数自身の解析的性質についての知見が必要であることがわかった。この点はこれからの新たな課題と言える。

(2) 高階数、特に階数 2 の非コンパクト局所対称空間に作用するラプラシアンの特値問題を単純化を用いて調べ、数論的応用を研究するのが目的であった。階数 1 の典型例であるリーマン面に対するセルバーグゼータ関数については、Luo, Minamide, Jorgenson らによってセルバーグゼータ関数の導関数の非零領域について既にいくつかの結果が得られていた。また、モジュラー群などの非コンパクトリーマン面に対しては、技術的理由によりセルバーグゼータ自身ではなくて、“修正された”セルバーグゼータ関数の導関数について研究されてきたことに注意する。今回、階数 2 の群の非コンパクトな離散部分群に対する素測地線定理の精密化やラプラシアンの特値問題、固有空間の次元の評価を研究するために、対応するセルバーグ型ゼータ関数とその高階の導関数の非零領域について研究を行い、新たな結果を得た。具体的には、階数 2 の群の非コンパクトな離散部分群の典型である実二次体のヒルベルトモジュラー群に対して、そのセルバーグ型ゼータ関数それ自身とその導関数についてその非零領域について研究を行い、零点の個数についてのある種の評価を得た。方法はこれまでに得ていたヒルベルトモジュラー曲面に対する“二重差分”跡公式を用いる。跡公式の右辺に現れる放物元や 2 型双曲元の寄与がより精密に評価できた事がポイントである。得られた零点の個数評価の誤差項を改善するには、セルバーグ型ゼータ関数の虚軸方向への漸近評価が必要となるが、これと他の階数 2 の群への拡張についてはさらに考察を進めたい。

(3) 実二次体のヒルベルトモジュラー群に対するヒルベルト・マース形式の存在に関する固有値分布の「ワイルの法則」の精密化について研究した。ヒルベルト・マース形式のウェイトとデデキントゼータの特殊値で決まる「ワイルの法則」の主要項は、以前既に筆者によって得られていたが、今回は漸近公式に現れる第 2 項を新たに決定することに成功した。第 2 項はタウバー型定理から直接導くことは出来ないことに注意する。得られた第 2 項はヒルベルト・マース形式のウェイトには依存せず、実二次体の単数基準のみに依存することが新たに分かった。併せて上記の場合の「ワイルの法則」の“導関数版”ともいえる、ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグゼータ関数の導関数の零点分布についても引き続き研究を行い、新たな結果を得ることが出来た。セルバーグゼータ関数の導関数の零点分布を研究することは、ヒルベルトモジュラー曲面上のラプラシアンの特値問題、固有空間の次元評価に関連して非常に重要である。今回、この導関数が虚軸上に零点を持ちうることを示し、その零点の個数を定量的に評価することが出来て、以前得ていた結果より精密な結果を得ることに成功した。また、この導関数の零点について、零点の実部の臨界線からの距離の和の漸近分布についての新たな結果も得ることが出来た。

(4) ゼータ関数の特殊値の研究で重要な役割を果たす「マラー測度」について、ある種の一般化について研究した。2 変数と 3 変数のローラン多項式に対するマラー測度のある種の“双対測度”を定義し、いくつかの具体的なローラン多項式に対して、その実例をいくつか計算した。この“双対測度”は 0 になる場合が多いが、いくつかローラン多項式に対しては非零になり、ゼータ関数の特殊値でかけることがわかった。数論的応用や双曲多様体の不変量との関係が示唆され、この点をさらに調べることはこれからの新たな課題であると言える。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Anton Deitmar, Polyxeni Spilioti, Yasuro Gon	4. 巻 31
2. 論文標題 A prime geodesic theorem for $SL_3(\mathbb{Z})$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1179--1201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2019-0008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 権 寧魯	4. 巻 63
2. 論文標題 セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第63回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 72--91
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yasuro Gon	4. 巻 62
2. 論文標題 Determinants of Laplacians on Hilbert modular surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publicacions Matemàtiques	6. 最初と最後の頁 615--639
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5565/PUBLMAT6221808	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Yasuro Gon
2. 発表標題 On zeros of the derivatives of Selberg zeta functions for Hilbert modular surfaces
3. 学会等名 米沢数論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuro Gon
2. 発表標題 On zeros of the derivatives of Selberg zeta functions for Hilbert modular surfaces
3. 学会等名 Zeta functions in OKINAWA 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuro Gon
2. 発表標題 A prime geodesic theorem for $SL(3, \mathbb{Z})$
3. 学会等名 Zeta functions in OKINAWA 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権 寧魯
2. 発表標題 $SL(3, \mathbb{Z})$ の素測地線定理について
3. 学会等名 東工大数論・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権 寧魯
2. 発表標題 セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在
3. 学会等名 第63回代数数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuro Gon
2. 発表標題 A prime geodesic theorem for $SL(3, \mathbb{Z})$
3. 学会等名 5th Kyoto conference on automorphic forms (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuro Gon
2. 発表標題 Determinants of Laplacians on Hilbert modular surfaces
3. 学会等名 金沢大学数理学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	都築 正男 (Tsuzuki Masao) (80296946)	上智大学・理工学部・教授 (32621)	