

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05183

研究課題名(和文) CM型代数曲線の族、多重ガンマ関数、スターク予想、及び関連する数論的諸問題

研究課題名(英文) Families of algebraic curves with CM, multiple gamma functions, Stark conjecture and related number-theoretic problems

研究代表者

加塩 朋和 (Tomokazu, Kashio)

東京理科大学・理工学部数学科・准教授

研究者番号：10403106

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：1. スターク単数、CM周期、多重ガンマ関数とそれらの p 進類似物の関係の解明、2. 古典的結果の再解釈、3. 得られた知見の別問題への応用、の三つを得た。1は不変量間の関係を表す予想を定式化し、諸予想との関係を明らかにした。2は1の予想の特別な場合としてコールマンの公式を再解釈することで、代数曲線上のフロベニウス作用の自然な連続性より、同公式が復元できることを示した。3は代数体に関して得た知見を利用し、整数環と単数群の構造を調べることで、冪整基底問題、類数問題への応用を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数曲線の族を調べる事でスターク予想と吉田予想へ同時にアプローチすることを目標としていた。多重ガンマ関数、CM周期と p 進類似物を用いて p 進周期環値関数を構成し、その性質に関する予想式から諸予想が従うことを示した。またコールマンによる古典的な結果の再証明にも応用できた。これらは本アプローチの有効性を示している。また代数曲線や代数体の知見から関連諸問題への応用へと繋がった。これらは学術的意義と言える。数学研究は諸科学の基礎固めの側面もある。本研究により代数体や代数曲線に関する知見が深められ、これらの応用として素数判定法や暗号理論など実用的なものが知られている。本研究も科学の礎となることを期待する。

研究成果の概要(英文)：We obtained: 1. a relation between Stark units, CM-periods, multiple gamma functions and their p -adic analogues; 2. a reinterpretation of a classical result; 3. some applications to the related problems. For 1, we formulated a conjecture on these invariants and clarified its relation to some other conjectures. For 2, by considering Coleman's formula as a special case of our conjecture, we showed that this formula can be recovered from a canonical continuity of the absolute Frobenius action on algebraic curves. For 3, we studied structures of rings of integers and unit groups of some number fields, provided applications to the power integral basis problem and the class number problem.

研究分野：整数論

キーワード：多重ガンマ関数 p 進多重ガンマ関数 スターク予想 グロス-スターク予想 CM周期 p 進周期
絶対フロベニウス作用 代数曲線

1. 研究開始当初の背景

代数体の元を多重ガンマ関数で表記する「スターク予想」(正確には rank one abelian かつ実素点の場合に限る、以下同様)と、幾何や保型形式の不変量の超越数部分として定義される CM 周期を同じく多重ガンマ関数で表す「吉田予想」が個別に提唱されており、別の研究として別々の研究者によって研究されていた。ただし、吉田敬之氏は自身の著書において、スターク予想と吉田予想の類似性を指摘していた。一方で、スターク予想の p 進版の「グロス - スターク予想」はダスグプタらにより盛んに研究され、近く完全解決されることになる。同研究においては、岩澤理論や肥田理論などの定式化によく見られるように、諸概念の「族としての性質」が重要な働きをしていた。これは本研究に対しても重要な示唆となった。吉田予想の p 進類似物も、吉田氏と私の共同研究により定式化されており、部分的な結果も得ていたが、完全解決からはまだ程遠い状況であった。

2. 研究の目的

スターク予想や吉田予想、そしてこれらの p 進類似問題に対し「新たな手法」での解決を目指すことが目標であった。この「新たな手法」とは、多重ガンマ関数、CM 周期と、これらの p 進類似物を同時に用いる手法である。研究開始以前にも、これらの一つ一つを調べる研究や、二つ間の関係性などは良く調べられてきていた。本研究ではこれらをまとめて一つの関数、または一つの不変量として扱い、その性質を調べることで、各問題への貢献を目指している。また、研究機関中に、いわば中間産物として得られるであろう、ある種の代数曲線の族に付随して定義される、 p 進的諸概念の性質の応用も視野に入れていた。

3. 研究の方法

研究内容に沿って、幾つかに分けて書く。

(1) スターク予想や吉田予想は、それぞれ多重ガンマ関数を用いて記述されている。そのため同問題の研究のためには、多重ガンマ関数の性質の再整備が必要であった。特に特殊値の代数性は重要であった。具体的な研究手法としても、吉田氏の先行研究から、総正単数群の作用に関する基本領域である「新谷領域」の性質の利用が有効であることが分かっていた。

(2) 研究目的にある「新たな手法」の実現のためには、多重ガンマ関数の特殊値と p 進多重ガンマ関数の特殊値を同時に扱うテクニックが必要であった。これらは複素数(実数)と p 進数という、別々の世界(正確には体)に値を取り、また、それぞれが新谷領域の選び方に依存する値であることから、何らかの工夫が必要であった。(1)の研究手法を応用し、再び新谷領域の性質を上手く使うことで、多重ガンマ関数と p 進多重ガンマ関数の「比」の概念を導入するというアイデアを得て、実現した。

(3) (1), (2)の結果を用いて、多重ガンマ関数、CM 周期と、それらの p 進類似物を同時に扱うことで、 p 進周期環に値を取る不変量を構成できた。 p 進周期環は p 進ホッジ理論でよく用いられる概念であり、絶対フロベニウス作用が定義される。我々の定義した不変量への絶対フロベニウス作用の様子を調べるのが第一の目的であった。この作用を表す予想式を定式化するにあたり、フェルマー曲線上の絶対フロベニウス作用を p 進ガンマ関数で表した、コールマンによる明示公式が大変参考になった。

(4) 本研究中、関連分野の専門家との研究討論などにより、代数体や代数曲線に関する知識や重要問題に多く触れることができた。また、本問題は類体構成へと繋がり、代数体の明示的な構造の解明へとつながる。これらの知見の応用先として、いくつかの具体的な関連問題にも挑戦し、結果を出すことができた。

4. 研究成果

幾つかに分けて書く。一部はプレプリント状態であり、今後早い時期に論文出版を目指す。

(1) 準備的な結果.

などにおいて多重ガンマ関数の特殊値の代数性の一部を示すことができた。また、残る代数性はスターク予想(の一部)と同値であることが言えた。これらの結果を用いて、スターク予想と

吉田予想を統一する予想式を定式化することができた。

、 γ などにおいて「多重ガンマ関数と p 進多重ガンマ関数の比」という概念を定義し、その取り扱い方を調べた。とくに、「スターク単数とグロス - スターク単数の公約元」ともいえる不変量を構成することに成功し、両予想を統一的に扱うためのテクニックを開発した。

(2) 主結果.

、 γ などにおいて「多重ガンマ関数、 CM 周期、 p 進多重ガンマ関数、 p 進周期の積商」の形で、新しい不変量を定義した。この不変量は p 進ホッジ理論に用いられる p 進周期環に値をもち、特に絶対フロベニウスによる作用が考えられる。この作用に関する予想式を定式化することができた。またこの予想式は、コールマンによる古典的な公式の一般化になっていることを示した。また、同不変量に関する予想から、吉田予想、グロス - スターク予想、スター予想 (の一部) が導けることを示した。

(3) 応用.

主結果において得られた予想式はコールマンの公式の拡張であった。言い換えれば、 p 進周期環に値をもつ新しい不変量を用いて、コールマンの公式を言い換えることができる。この言い換えを利用し、 γ などにおいてコールマンの公式の別証明を行った。フェルマー曲線の族への絶対フロベニウス作用の p 進連続性を仮定すると、 p 進ガンマ関数の満たす関数等式、及び、不変量の満たす乗法関係式から、コールマンの公式が自動的に従う、という結果となった。この結果の一般化が進めば、本研究に対しても応用が期待できる。

(4) 派生した結果.

本研究中は類体構成など、代数体の明示的な構造に関する研究と繋がっている。また、研究期間中に周辺分野の専門家との交流を通じて、代数的整数論における知見や問題意識を吸収することができた。その応用として、 γ などにおいて、ある種の代数体の族の単数群の構造を調べ、類数問題との関連などを明らかにした。また γ などにおいて、巡回三次体の整数環の構造を調べ、冪整基底問題に関する結果を出すことに成功した。

< 引用文献 >

T. Kashio, H. Yoshizaki, Minimal relative units of the cyclotomic \mathbb{Z}_2 -extension, preprint (arXiv:2107.08587)

T. Kashio, Note on Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, to appear in Annales de l'Institut Fourier (arXiv:1904.02879)

T. Kashio, On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (arXiv:1706.03198)

T. Kashio, R. Sekigawa, The characterization of cyclic cubic fields with power integral bases, Kodai Math. J. 44(2) (2021), 290-306

T. Kashio, A period-ring-valued gamma function and a refinement of the reciprocity law on Stark units, RIMS Kokyuroku Bessatsu B83 (2020), 169-181

T. Kashio, p -adic measures associated with zeta values and p -adic log multiple gamma functions, Int. J. Number Theory 15 (2019), no. 5, 991--1007

T. Kashio, On the ratios of Barnes' multiple gamma functions to the p -adic analogues. J. Number Theory 199 (2019), 403-435

T. Kashio, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units. J. Reine Angew. Math. 741 (2018), 255-273

T. Kashio, On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function. Amer. J. Math. 140 (2018), no. 3, 617-651

T. Kashio, Stark's conjecture over the rational number field and CM -periods of Fermat curves, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B64 (2017), 93-106

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kashio Tomokazu, Sekigawa Ryutaro	4. 巻 44
2. 論文標題 The characterization of cyclic cubic fields with power integral bases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 290-306
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj44204	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 加塩朋和	4. 巻 1
2. 論文標題 On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 早稲田大学整数論研究集会 2019報告集	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tomokazu Kashio	4. 巻 B83
2. 論文標題 A period-ring-valued gamma function and a refinement of the reciprocity law on Stark units	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 169-181
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kashio Tomokazu	4. 巻 199
2. 論文標題 On the ratios of Barnes' multiple gamma functions to the p-adic analogues	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 403 ~ 435
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2018.11.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kashio Tomokazu	4. 巻 15
2. 論文標題 p-Adic measures associated with zeta values and p-adic log multiple gamma functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 991 ~ 1007
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793042119500532	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomokazu Kashio	4. 巻 64
2. 論文標題 Stark's conjecture over the rational number field and CM-periods of Fermat curves	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 93-106
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomokazu Kashio	4. 巻 140
2. 論文標題 On the algebraicity of some products of special values of Barnes' multiple gamma function	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 617-651
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2018.0015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomokazu Kashio	4. 巻 741
2. 論文標題 Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 255-273
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2015-0081	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 加塩朋和	4. 巻 1
2. 論文標題 ガンマ関数の関数等式とCM周期の単項関係式の対応とその応用	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第67回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 73-84
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 15件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 CM周期, 多重ガンマ関数, Stark予想の関係とそのp進類似
3. 学会等名 Dasgupta Kakde Workshop (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 整数論におけるp進的手法の紹介
3. 学会等名 代数学の萌芽 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 p進ガンマ関数の関数等式と連続性に関して
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 CM周期の代数的整数論への応用の紹介
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2020 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomokazu Kashio
2. 発表標題 A note on the monogeneity and the unit group
3. 学会等名 Second meeting of Monogeneity and power integral bases (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 フェルマー曲線上の絶対フロベニウスに関するコールマンの公式について
3. 学会等名 2019大分佐賀整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 円単数の相互法則の細分, 及びその一般化
3. 学会等名 第18回北陸数論研究集会「数論における相互法則」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomokazu Kashio
2. 発表標題 On Yoshida's conjecture concerning CM-periods and multiple gamma functions
3. 学会等名 21st Autumn Workshop on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 類体構成の具体例, 及び p 進周期との関係について
3. 学会等名 坂内研究室プロジェクト研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units
3. 学会等名 2019早稲田整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 On Coleman's formula for the absolute Frobenius on Fermat curves
3. 学会等名 愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 On a refinement of the reciprocity law on Stark units
3. 学会等名 京都大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomokazu Kashio
2. 発表標題 On a relation between CM periods, Stark units, and multiple gamma functions
3. 学会等名 Workshop "Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 A note on special values of the gamma function
3. 学会等名 坂内研究室プロジェクト研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 A period-ring-valued gamma function and a refinement of the reciprocity law on Stark units
3. 学会等名 Algebraic Number Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 フェルマー曲線上のフロベニウス行列の公式とその一般化に関して
3. 学会等名 プロジェクト研究集会2022 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 加塩朋和
2. 発表標題 ガンマ関数の関数等式とCM周期の単項関係式の対応とその応用
3. 学会等名 第67回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人のWebページ https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/index.html
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 21st Autumn Workshop on Number Theory	開催年 2018年～2018年
---	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------