

令和 5 年 6 月 20 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05185

研究課題名（和文）多重ゼータ関数の総合的研究と量子可積分系への応用

研究課題名（英文）Comprehensive study of multiple zeta functions and their application to quantum integrable systems

研究代表者

小森 靖（Komori, Yasushi）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：80343200

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：ルート系に付随する多重ゼータ関数について、特殊値やそれらの間の関係式についてさまざまな手法で研究し、特に統一的な視点として母関数による記述法を与えた。この記述法を用いればルート系とその部分ルート系を与えることに決まる非常に大きなクラスの関係式を得ることができる。またこれまでの研究によって得られた膨大な結果について、証明などを再検討し簡略化や改良を行うことによって理論を整備し、さらに新たな主張や例なども織り交ぜることによって、初学者にも読みやすい本を出版することとなった。この本によってルート系のゼータ関数の理論の進展に大きく貢献できると考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、数論で最も重要な量のひとつであるゼータ関数と量子論で最も重要な量のひとつである分配関数とが結びついているという発見から新たな研究が生まれ、大きく発展し始めている。本研究によって、量子論やリー群を軸として広がりを見せている様々な多重ゼータ関数について、分野を超えた広い枠組みで捉えることができ、特殊値や関数関係式を通して多重ゼータ値の数論的理解や量子可積分系の基礎的な量の計算に貢献できたと考えている。

研究成果の概要（英文）：Multiple zeta functions associated with root systems are studied by various methods for their special values and relations among them, and in particular, a description in terms of the generating functions is given as a unified viewpoint. Using this description, we can obtain a very large class of relations associated with each root system and its subroot systems. In addition, the theory has been developed by reexamining, simplifying, and improving the proofs of a large number of results obtained through previous research, and by incorporating new arguments and examples, we will publish a book that is easy to read even for beginners. I believe that this book will make a significant contribution to the development of the theory of zeta functions of root systems.

研究分野：代数学

キーワード：多重ゼータ関数 ルート系

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

量子ゲージ理論において、分配関数は最も基本的で重要な量である。Witten は二次元コンパクト多様体上のコンパクトリー群による量子ゲージ理論の研究に際し、その分配関数の極限が平坦接続のモジュライ空間の体積で記述されることを見出した [参考文献]。さらにその体積は、付随するリー群の有限次元既約表現の次元に関するディリクレ級数となり、特に向き付け可能な場合、有理数となることも示した。後に Zagier はこのディリクレ級数の一変数関数化したものを Witten ゼータ関数と名づけ、解析数論的考察からも有理数性が従うことを示している [参考文献]。また Szenes は超平面配置の幾何という観点から計算アルゴリズムを導出した [参考文献]。ランクの低い幾つかの場合に関しては多くの具体的な研究がなされており、例えば名古屋大の松本耕二氏と首都大の津村博文氏は多変数化を考察し、特殊値の他、解析接続によって有理型関数としての性質、関数関係式等に関する様々な結果を得ているが、一般の単純リー群の場合に関しては、その解析の難しさゆえに具体的な記述や性質等についてはほぼ不明という状況であった。

2. 研究の目的

本研究は、これらのゼータ関数を始め、さらに数論的ゼータ関数及び他種の多重ゼータ関数を含む非常に一般的な枠組みの中で系統的に多重ゼータ関数を解析し、それらの統一的理解を目指すものである。これまでの研究により、前述のゼータ関数についてかなり研究を進めることができたが、基本となる Riemann ゼータ関数に比較すれば、まだ基礎研究段階と言わざるを得ない。よって本研究は種々の多重ゼータ関数の総合的理解をするための基礎理論の完成を主な目的とする。

3. 研究の方法

目的に挙げた通り、種々の多重ゼータ関数の総合的理解のための基礎理論の完成が目標であるが、これまで関連する研究が予想以上に発展し、それによってさらに基礎理論が深化していった経緯をみれば、応用や関連分野の研究を進めていくことで全体として研究の広がりや深化が見込めることから、これらの研究も並行して行う。応用や関連分野については

- (1) 数論への応用、 p 進拡張、
- (2) リー群に付随する他の種類のゼータ関数論への応用、

等を主に研究する。その際、様々な専門家と交流することで多角的に研究を行うため、滞りなく進められると期待できる。

4. 研究成果

- (1) [参考文献] まずにおいてルート系のゼータ関数に対し、部分ルート系を選ぶごとに決まるある種の符号付き線形結合を考え、この線形結合を積分表示することにより、符号付き和がルート系のベルヌーイ関数を含む和で表されることを示した。この恒等式は符号付き和が消滅しない場合、ルート系のゼータ関数間の非自明な関数関係式を与える。また符号付き和が消滅しないことの基準を、付随する Weyl 群の Poincare 多項式の観点から与えた。さらに、値の関係式を表す母関数が関数関係式を表す母関数を全て再現することを示した。一般には関数関係式から値の関係式を得ることは特殊値を取ることで得られるが、この主張は逆が成立することを示している。

において、古典ルート系や部分ルート系のランクが 1 の場合などを含む様々な場合において具体的な関数関係式の母関数を計算した。これまでの結果はルート系の言葉で記述されるものであったが、この結果によってより具体的で取り組みやすい表示が得られた。

- (2) [参考文献] 有限多重ゼータ値に関連するベルヌーイ多項式の多重一般化を導入することによって、すべての有限多重ゼータ値に対する明示的な公式を提示した。さらに、これらの値は多重ゼータ関数と Hurwitz ゼータ関数の多重スター類似の特殊値によっても記述されることを示した。この研究によって、新たな対象である統一ゼータ関数の研究へと繋がることになった。
- (3) [参考文献] $GL_2(\mathbb{C})$ に付随する荒川・金子ゼータ関数および、その特殊値に現れるポリベルヌーイ多項式を定義した。これらのゼータ関数やポリベルヌーイ多項式は通常荒川・金子ゼータ関数やその類似を含む、非常に大きなクラスとなっている。これらのゼータ関数

やポリベルヌーイ多項式に関して差分関係や双対関係を得ることができた。この結果によって荒川・金子ゼータ関数やその類似で発見されている非常に良い対称性や性質は、一般の $GL_2(\mathbb{C})$ に付随する全ての関数で成り立つものであり、それに群論的な意味があることがわかった。

- (4) [参考文献] 一般化された Hurwitz-Lerch 型の多重ゼータ関数の解析的性質を研究し、その特異点を解消する方法として desingularization という手法を開発した。その結果、得られる多重ゼータ関数は整関数であることや、通常の高重ゼータ関数の有限和として表現することができることが示された。応用として、Euler-Zagier 型二重ゼータ関数の desingularization の特殊値を明示的に計算することやルート系のゼータ関数の desingularization の具体形が計算できた。また、p-adic 多重 L 関数と p-adic 多重ポリログリズムの関係に関する我々の過去の結果を、非正整数に拡張することができた。

<参考文献>

E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, *Comm. Math. Phys.*, 141 (1991), 153-209.

D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in "First European Congress of Mathematics" Vol. II, A. Joseph et al. (eds.), *Progr. Math.*, 120, Birkhäuser, 1994, 497-512.

A. Szenes, Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials, *Internat. Math. Res. Notices*, 18 (1998), 937-958.

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems, *Adv. Stud. Pure Math.*, 84, 2020, 263-295.

Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups, *Tohoku Math. J.*, 72 (2020), 87-126.

Y. Komori, Finite Multiple Zeta Values, Multiple Zeta Functions and Multiple Bernoulli Polynomials, *Kyushu J. Math.*, 72 (2018), 333-342.

Y. Komori and H. Tsumura, On Arakawa-Kaneko zeta-functions associated with $GL_2(\mathbb{C})$ and their functional relations, *J. Math. Soc. Japan*, 70 (2018) No.1, 179-213.

H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of multiple zeta-functions of generalized Hurwitz-Lerch type, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* B68 (2017), 27-66.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Komori Yasushi, Matsumoto Kohji, Tsumura Hirofumi	4. 巻 84
2. 論文標題 An overview and supplements to the theory of functional relations for zeta-functions of root systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 263-295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410263	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Komori Yasushi, Matsumoto Kohji, Tsumura Hirofumi	4. 巻 72
2. 論文標題 Zeta-functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 87 ~ 126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1585101623	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 KOMORI Yasushi	4. 巻 72
2. 論文標題 FINITE MULTIPLE ZETA VALUES, MULTIPLE ZETA FUNCTIONS AND MULTIPLE BERNOULLI POLYNOMIALS	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 333 ~ 342
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.72.333	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura	4. 巻 B68
2. 論文標題 Desingularization of multiple zeta-functions of generalized Hurwitz-Lerch type	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 27-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Komori and H. Tsumura	4. 巻 70
2. 論文標題 On Arakawa-Kaneko zeta-functions associated with $GL_2(C)$ and their functional relations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 179-213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/07017501	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 小森 靖
2. 発表標題 On variants of the Arakawa-Kaneko zeta function
3. 学会等名 第3回 青葉山ゼータ研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小森 靖
2. 発表標題 Finite Multiple Zeta Values, Symmetric Multiple Zeta Values and Unified Multiple Zeta Functions
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小森 靖
2. 発表標題 有限多重ゼータ値, 対称多重ゼータ値, および補間ゼータ関数について
3. 学会等名 多重ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小森 靖
2. 発表標題 Finite Multiple Zeta Values, Multiple Zeta Functions and Multiple Bernoulli Polynomials
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小森 靖
2. 発表標題 多重楕円ガンマ関数の積分表示と関数関係式
3. 学会等名 多重三角関数とその一般化（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Komori
2. 発表標題 Functional relations for zeta-functions of root systems and Poincare polynomials of Weyl groups I
3. 学会等名 Various Aspects of Multiple Zeta Functions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松本 耕二 (Matsumoto Kohji) (60192754)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	津村 博文 (Tsumura Hirofumi) (20310419)	東京都立大学・理学研究科数理学専攻・教授 (22604)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関