様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2023
課題番号：１７Ｋ０５１９２

研究課題名（和文）非輪状複体の変形を用いたイデアル商の計算とその応用

研究課題名（英文）Computation of ideal qutients by transformation of acyclic complexes and its application

研究代表者
西田　康二（Nishida, Koji）

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：６０２２８１８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は可換環のイデアルのシンボリック冪を計算する方法を確立し、シンボリックリース環の研究に応用することであった。まず、イデアルの自由分解を与える非輪状複体を変形してイデアル商の自由分解を構成する手法を見直し、末尾の2つの自由加群の基底を適切に表現する方法を見出した。さらに、環が次数付の場合に、斉次イデアルのシンボリック冪に一致する可能性のあるイデアルに対し、その剰余環のヒルベルト係数を調べることにより、期待された一致の成立を見極める方法を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
シンボリックリース環のネータ性はHilbertの第14問題と密接に関連しており、特に、体上の多項式環のイデアルに付随するシンボリックリース環で、非ネータなものを構成することが重要である。その為には、具体的に与えられたイデアルのシンボリック冪を計算する必要があるのだが、その様な計算を実行する実用的な手順はあまり知られていなかった。本研究では、多様なイデアルに対して適用可能な手法を提示することができ、この成果を未解決問題の解明にも活かせるのではないかと期待している。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research was to establish efficient methods for computing symbolic powers of ideals and apply them for studying symbolic Rees algebras. We first revised a technique for getting free resolutions of quotients of ideals transforming acyclic complexes which give free resolutions of ideals. Next, in the case where the rings are graded, studying the Hilbert coefficients of the quotient rings by homogeneous ideals which may coincide with the required symbolic powers, we found a method for checking whether the expected coincidences hold or not.

研究分野：代数学　可換環論

キーワード：可換環　シンボリック冪　イデアル商　非輪状複体　ヒルベルト係数

１．研究開始当初の背景

本研究は、シンボリックリース環と呼ばれる次数付可換環に関する研究の一環として開始された。シンボリックリース環のネータ性はHilbertの第14問題と密接に関連しており、特に、体上の多項式環のイデアルに付随するシンボリックリース環で、非ネータなものを構成することが重要である。その為には、具体的に与えられたイデアルのシンボリック冪を計算する必要があるのだが、本研究の開始時には、その様な計算を実行する一般的な手順はあまり知られておらず、多様なイデアルに対して適用可能な手法を整備することが喫緊の課題であった。

研究代表者は、それまでの研究において、可換環Rのイデアル I とその自由分解になる非輪状複体K.が与えれたとき、正則列で生成されるイデアルQを用いてK.を変形することにより、イデアル商I:Qの自由分解を構成する方法を既に見出していた。その方法を整備し、一般化すれば、シンボリック冪の計算に応用することが可能になるであろうと期待できた為、本研究に着手するに至った。

２．研究の目的

本研究の目的は可換環のイデアルのシンボリック冪を計算する方法を確立し、シンボリッククリース環の研究に応用することである。代数閉体上の多項式環において射影平面の有限点集合 H を定義するイデアル I_H を調べることに最も興味があるのだが、通常のべき乗の自由分解が掌握できているイデアルに対してシンボリック冪の計算を実行できれば、そこから I_H に関する多くの帰結が得られることが知られている。対象とするイデアルのべき乗の自由分解を与える非輪状複体に対して，本研究で得られた変形理論を適用する。

３．研究の方法

この研究では、次元がｄの局所（または次数付き）Cohen-Macaulay環Rにおいて長さｄの自由分解を持つイデアルＩが与えられたとき、適当なパラメータ系で生成されるイデアルQを用いてＩの自由分解を変形することにより、イデアル商Ｉ：Qの自由分解となる非輪状複体を構成する方法（これを「*-変形」という）に注目する。そのような変形を繰り返すことにより、イデアルＩの冪乗のサチュレイションやシンボリック冪の計算を実行してみた。また、環が次数付の場合には、Ｉのシンボリック冪の候補となるイデアルＪに対してR／Ｊのヒルベルト係数を調べることにより、Ｊがシンボリック冪に一致しているかどうかを見極める研究も実践してみた。

４．研究成果

2017年度の研究成果：

*-変形の結果として得られる非輪状複体の末尾の準同型写像を制御することが重要になるのだが、その為には、末尾の２つの自由加群の基底を適切に表現する必要がある。2017年度は $d = 3$ の場合にこの問題に取り組んでみた。最初に与えられた自由分解の各項の基底と{1，2，3}の数字の組み合わせを用いると良いことが分かったので、スペース・モノミアル・カーブを定義するイデアル P について具体的な計算を実行してみた結果、変形の繰り返しに耐えうるのではないかと思われる基底の記述法を見出すことができた。

２以上の整数ｎに対してＰのｎ乗の自由分解の末尾にある自由加群は、不定元A，B，Cの $n - 2$ 次単項式全体を添え字の集合とするような基底をもつのだが、その自由分解に*-変形を施

して得られる非輪状複体の末尾の自由加群は、nが3以上であれば、A，B，Cのn － 3次単項式と{1，2，3}を組み合わせて添え字の集合を記述する事が適切であると考えている。当然、もう一度*-変形を施せば、末尾の自由加群の基底はA，B，Cのn － 4次単項式の部分集合と関係してくるはずである。

2018 年度の研究成果：

本研究では、*-変形の結果として得られる非輪状複体の末尾の準同型写像を制御することが重要になるのだが、その為には、末尾の 2 つの R-自由加群の基底を適切に表現する必要がある。前年度はd ＝ 3でRが局所環の場合にこの問題に取り組み、変形操作の繰り返しに耐えうるのではないかと思われる基底の記述法を見出すことができたので、2018 年度は次数付版の*-変形の理論を構築することを目標とした。

主結果は、3次元次数付マコーレー環Rにおいて次数付自由分解をもつ斉次イデアルIが与えられたとき、適当な斉次パラメーターイデアルQを用いてIの次数付自由分解を変形することにより、イデアル商I：Q（これも斉次イデアルになる）の次数付自由分解となる非輪状複体を構成するというものである。前年度の研究では、末尾の2つのR-自由加群の基底を3変数A，B，Cの単項式と数字1，2，3の組み合わせで記述する方法を見出すことができたのであるが、これらの変数と数字に適切な重みを与えることが鍵になった。また、末尾の R-自由加群の基底の次数から、シンボリック冪の生成元の次数を容易に計算することが可能なものになっている。

2019 年度の研究成果：

前年度までのシンボリック冪の研究では、具体例を考察する際には、主にスペース・モノミアル・カーブを定義する素イデアルを扱い、シンボリックリース環のネータ性を調べる為の Huneke の判定法や非輪状複体の変形を用いたシンボリック冪の計算などが実際に適用できることを確かめてきた。スペース・モノミアル・カーブの解析と書くと、非常に特殊なものを扱っているように感じられるが、それは射影平面内の有限な点集合のブローアップと密接に関係している。複数個の素イデアルの共通部分が持つ複雑な性質が、一つの素イデアルの性質に帰着できれば、大きな進展が得られるに違いない、という考え方が背後にあり、多くの研究者がその方向から問題に取り組んでいる。

しかし、この年度の研究では観点を全く変え、有限な点集合の定義イデアル自体を直接考察してみた。点の数が少ない場合や、射影平面内の2次曲線（既約でなくても良い）上に点集合が乗っている場合などにシンボリック冪を調べてみると、非常に興味深い元が見つかり、Huneke の判定法も適用できることが分かった。

2020 年度の研究成果：

本研究では、Huneke の判定法を応用してIのシンボリックリース環のネータ性を考察することも主要なテーマとしている。Huneke の条件をみたす良い元の存在を調べることが鍵となるが、これは代数幾何学と関連する未解決問題に対する環論的アプローチと捉えることができる。

この年度の当初の予定は、射影平面内の有限な点集合Hを定義するイデアルI_Hのシンボリック冪を非輪状複体の変形を用いて計算することであったが、それは想定していたよりも非常に難しく、スペース・モノミアル・カーブの解析を通して考察を進めるというアイディアの有効性を再確認する事となった。一方、Huneke の判定法を適用してI_Hのシンボリックリース環のネータ性を調べる研究では、より多くの具体例を見出す事ができた。特に、Huneke の条件をみた

す元として斉次なものをとれない例が存在することが分かり、今後の研究を進める上で重要な発見であったと感じている。I_Hは体上3変数多項式環Sの斉次イデアルであるが、Sを極大斉次イデアル$\mathfrak{m}$で局所化した環$S_\mathfrak{m}$にI_Hを拡大して環論的な考察を行うことにより、初めてHunekeの条件がみたされていることを確認できる例になっている。

2021年度の研究成果：

Rは非負整数で次数付けられたd次元の可換なCohen-Macaulay環で0次斉次部分 R_0はArtin局所環とする。本研究ではRの斉次イデアルIのシンボリック冪 $I^{(n)}$ を効率的に計算する方法を模索しているが、剰余環R／Iの次元が1でIを極小（すなわち次元が1の）素因子Pで局所化したイデアルが正則列で生成される場合には、通常の冪乗I^n を含んでいてかつ $I^{(n)}$ に含まれる斉次イデアルJで剰余環R／Jのdepthが正になるものを見つけられれば、$J = I^{(n)}$が成り立つ。この研究では、非輪状複体の変形をその作業に応用できることを確かめてきたが、2021年度は他のアプローチについても考察し、その成果としてヒルベルト係数を用いた議論も有効であることを見い出した。

以下では、RはR_0上で有限個の1次斉次元で生成され、JはRの斉次イデアルとし、剰余環R／Jの次元はrとする。さらに、iは0以上1以下の自然数とする。このとき、$r-i$個の1次斉次元$f_1, f_2, \ldots, f_{r-i}$を、上表列と呼ばれる一般的な元の列となる様にとると、R／Jのdepthが$r-i$以上になる為には、R／J と $R/((f_1, f_2, \ldots, f_{r-i})+J)$の第iヒルベルト係数の一致が必要十分であるという事実が新たな知見である。剰余環R／Iの次元がrで、次元が$r-i$以上になるV(I)の任意の元によるIの局所化が正則列で生成されるという状況では、I^n を含み$I^{(n)}$に含まれる様なJに対して、その第iヒルベルト係数を調べることにより$I^{(n)} = J$となるかどうかを判定することが可能になる。

2022年度の研究成果：

前年度の研究成果により、0以上r以下の自然数iに対して$r-i$個の1次斉次元$f_1, f_2, \ldots, f_{r-i}$を、上表列と呼ばれる一般的な元の列となる様にとると、R/Jのdepthが$r-i$以上になる為には、R／JとR$/((f_1, f_2, \ldots, f_{r-i})+J)$の第iヒルベルト係数の一致が必要十分である事は判明したが、この判定法を適用するために選んだ$r-i$個の1次斉次元が、上表列になっているかどうかのチェックは、残念ながら容易ではない。そこで2022年度の研究では、パラメータ系の一部分となる$r-i$個の1次斉次元の組が自動的に上表列となる為には、環RとR/Jがどのような条件を充たせば良いかを調べ、実用的な結果を得ることができた。

2023年度の研究成果：

最終年度の研究では、R上の有限生成次数付加群Mに対し、Mの自由分解を与える非輪状複体を用いて、Mの第iヒルベルト係数$e_i(M)$を効率的に計算する方法を追求した。

ヒルベルト係数は、次数付加群Mの性質を忠実に反映する不変量ではあるが、具体的に与えられたMに対してその値を計算することは難しいことが多い。そこで、R上の有限生成次数付加群に対して相対的ヒルベルト係数という新たな不変量を導入し、いくつかの次数付加群の間の相対的ヒルベルト係数を比較することを試みた結果、その応用として、Mの自由分解に現れる次数付自由加群たちのデータを用いて$e_i(M)$を記述する公式を与えることが出来た。さらに、この公式の実用性を保証する作業として、Rが体上の多項式環の場合に、具体的な斉次イデアルIに対してR/Iのヒルベルト係数の計算を実行してみた。

例えば、R が $X_1, ..., X_d$ を変数とする体上の多項式環のとき、1 以上 d 未満の整数 r をとり、$X_{r+1}, ..., X_d$ によって生成される R の斉次イデアルと、R の極大斉次イデアルの積を I として、その剰余環 R/I を R 上の次数付加群と見て M とおくと、$e_0(M) = 1$ となり、$0 < i < r$ ならば $e_i(M) = 0$ で、さらに $e_r(M)$ は $(-1)^r$ と $d - r$ の積に一致する。さらに、$X_1, ..., X_r$ が M のパラメータ系であることは容易に分かるが、R が鎖状環かつ M が等次元で、R を極大斉次イデアルと異なる素イデアルで局所化すると Cohen-Macaulay 環になることから、$X_1, ..., Xr$ は M の上表列になることが従う。そして、$(X_1, ..., X_r)M$ による M の剰余加群に対して、その第 i ヒルベルト係数を調べると、$e_i(M)$ と確かに異なる値を取ることが確かめられた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kai Keisuke、Nishida Koji	４．巻 587
２．論文標題 Finitely generated symbolic Rees rings of ideals defining certain finite sets of points in P^2	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 20～35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.07.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kazuhiko Kurano and Koji Nishida	４．巻 68
２．論文標題 Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Michigan Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 409-445
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　3件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 西田康二
２．発表標題 On the Hilbert coefficients of graded modules over graded rings
３．学会等名 第43回 可換環論シンポジウム（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 西田康二
２．発表標題 次数付環上の次数付加群のヒルベルト係数について
３．学会等名 可換環論の新しい融合セミナー（招待講演）
４．発表年 2022年

1．発表者名
西田康二

2．発表標題
Noetherian symbolic Rees rings of finite sets of points in P^2

3．学会等名
第41回可換環論シンポジウム（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
西田康二

2．発表標題
Finitely generated symbolic Rees rings defined by certain finite sets of points in P^2

3．学会等名
東京可換環論セミナー（招待講演）

4．発表年
2019年

1．発表者名
西田康二

2．発表標題
シンボリックリース環のネータ性について

3．学会等名
第63回代数学シンポジウム（招待講演）

4．発表年
2018年

1．発表者名
Koji Nishida

2．発表標題
On the symbolic Rees rings for Fermat ideals

3．学会等名
1147th AMS Meeting, Special Session on Commutative Algebra（国際学会）

4．発表年
2019年

１．発表者名 西田　康二
２．発表標題 On the symbolic Rees rings for Fermat ideals
３．学会等名 第39回可換環論シンポジウム（国際学会）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	藏野　和彦 (Kurano Kazuhiko) (90205188)	明治大学・理工学部・教授 (32682)	
連携研究者	早坂　太 (Futoshi Hayasaka) (20409460)	岡山大学・環境生命科学研究科・教授 (15301)	
連携研究者	居相　真一郎 (Shinichiro Iai) (50333125)	北海道教育大学・教育学部札幌校・准教授 (10102)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関