様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月２０日現在

機関番号：３４４１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2023
課題番号：１７Ｋ０５１９９

研究課題名（和文）リーマン・ヒルベルト対応のq類似とその周辺

研究課題名（英文）q-Riemann Hilbert correspondence nad related topics

研究代表者
伊藤　公毅（Ito, Ko-Ki）

大阪電気通信大学・共通教育機構・特任准教授

研究者番号：３０４５６８４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン・ヒルベルト対応とは、線型微分方程式でその解が有限次元となるようなものに対し、その(位相幾何学的に高次のデータを含めた)解を対応させる対応である。「位相幾何学的に高次のデータ」は、具体的には、ホモロジー・サイクルやドラーム・コホモロジー類で実現される。実際、ドラーム・コホモロジー類は微分形式として、ホモロジー・サイクルは積分路としての実体をもち、その積分をとると、超幾何函数などの重要な函数がえられる。この対応は圏同値(等価な対応)を与えている。この物語をq解析学でもある程度パラレルに展開できることが、本研究でわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
リーマン・ヒルベルト対応のq類似という言葉は、実は、方々で言われている。しかし、それら相互の関係ははっきりとはみえにくい。その原因として、言葉や基礎概念が整備されていない為、交通整理ができてなかったことがあげられる。本研究では、それらをクリアにする言語・基礎概念を提供するものとなっている筈である。それだけにとどまらず、q差分方程式論の基礎理論を整備するよい言葉であると期待できる。もう一つの意義は、q特殊函数に関するドラーム理論を記述するよい言葉を提供する点である。この土台の下に、qドラーム理論における未解決問題の幾つかを解く道が拓かれた筈である。

研究成果の概要（英文）：The Riemann-Hilbert correspondence assigns a linear differential equation whose solution space is finite dimensional to the solution space with derived topological data. Concretely, derived topological data described by homology cycles or de Rham cohomology classes. In fact, de Rham cohomology classes are represented by differential forms and homology cycles play rolls as integration paths. The integrals of thoseforms along those paths define special functions as the hypergeometric functions. That correspondence gives a categorical equivalence. In our research, we discover a parallel story in the world of q-analysis.

研究分野：代数解析

キーワード：q差分加群　リーマン・ヒルベルト対応　ドラーム複体

１．研究開始当初の背景

ホロノミック $\mathscr{D}$ 加群 $\mathscr{M}$ に対して, リーマン・ヒルベルト対応は

$$\mathscr{M} \rightsquigarrow DR(\mathscr{M}) := R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}, \mathscr{O})$$

で与えられ, $DR(\mathscr{M})$ はドラーム複体とよばれる. 実際, 微分形式の層による $\mathscr{O}$ の局所自由分解で書き直すとお馴染みのドラーム複体が現れる. 一方で, $DR(\mathscr{M})$ は偏屈層になっており, そのコホモロジーは (簡単な状況ではある開部分集合上の) 局所系係数コホモロジーとなる. これと, 前述のドラーム複体のコホモロジーとの同型を記述するもの (或いは局所系係数サイクルのホモロジーとドラーム・コホモロジーのペアリング) として超幾何積分は捉えられる. この視点により, 超幾何函数の一般化への道が拓かれ, 種々の研究が為されてきた. q 超幾何函数についても, この視点—ドラーム・コホモロジーとサイクルのホモロジーのペアリングであるという視点— を持ち込むことで種々の性質が明らかにされてきていた. 但し, ドラーム・コホモロジーの定義をはじめとして, 基本的概念が固められているという段階にはなかった. (その為「ドラームの定理」にあたるものは予想のままであった.)

２．研究の目的

第一に, q 差分ドラーム理論の基礎付けを行うことが目的であった. 通例では, ドラーム理論では微分形式の外積 (共変テンソル) を用いるのが普通であるが, q 差分形式の外積を「共変テンソル」として定義することは難しい. (q 差分形式の座標変換は $\mathscr{O}$ 係数では収まらない.) そこで, q 差分作用素の環 $\mathscr{D}_q$ を導入し, $\mathscr{D}_q$ 加群 $\mathscr{M}$ のドラーム複体 $DR(\mathscr{M})$ からドラーム・コホモロジーを定義し, ドラーム理論を構築する. というわけで, 第二の目的は, $\mathscr{D}_q$ 加群の理論 (の基礎部分) を構築することである. 第三の目的は, $\mathscr{D}_q$ 加群の理論によって整備された地盤の上に, リーマン・ヒルベルト対応を実現することである. さらに, ここで得られるドーラム理論の π_1 版を考察することが目標となる. (π_1 の q 変形も夢ではない.)

３．研究の方法

上でも述べたように, まず q 差分作用素の環の層を導入する. その為に, 層が定義されるべきサイト X を導入する. (実際には, q 差分作用素の張り合わせの問題から, 単なるサイト X ではなく, その「被覆」である単体的サイト ${}_q(X)_\bullet$ を用いる. その上に, q 差分作用素の環の層 $\mathscr{D}_q^\bullet$ が定義される.) これにより, 冒頭で述べた式を通じて $\mathscr{D}_q^\bullet$ 加群のドラーム複体が定義される. 実際には, $\mathscr{D}_q^\bullet$ 加群としての $\mathscr{O}$ の, 局所自由分解を得るために, 接束の $\mathscr{D}$ への係数拡大 $\mathscr{D}\partial$ の q 類似 $(\mathscr{D}_{q^\lambda}\partial_{q^\lambda})^\bullet$ をとる. (これの張り合わせとして標準的なものはなく, 1 つ選ぶ必要がある.) さらに, ドラーム複体は X に「降下」し, X 上のドラーム・コホモロジーが定義される. 次に, q サイクルのホモロジーを導入する. 1 次の胞体としては, 区間 $[qt^\lambda, t^\lambda]$ (或いは q 接ベクトル $\partial_{q^\lambda} : f \mapsto \frac{f(t^\lambda)-f(qt^\lambda)}{(1-q)t^\lambda}$) だけでは不十分で, アーベル多様体 $(\mathbb{C}^*)^n/q^{\mathbb{Z}^n}$ 上の有理型 1 形式で高々1 位の極を有するものも 1 次の胞体に含める. これらで生成される空間の p 階外積として p 次胞体を定義する.

４．研究成果

まず, 高次元の場合を含めひろく一般を扱うために (σ_λ) 差分を導入した:

定義

X を n 次元複素多様体, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の (連結) 開部分多様体の族とする. 次の条件

1. $X = \bigcup X_\lambda$,
2. X_λ 上に半群 $(\mathbb{Z}_{>0})^n$ の作用 $\sigma_\lambda : (\mathbb{Z}_{>0})^n \times X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ が与えられてる, すなわち, $\sigma_\lambda^{\chi'}(\sigma_\lambda^{\chi}\mathsf{p}) = \sigma_\lambda^{\chi'+\chi}\mathsf{p}$ を満たす写像 σ_λ が与えられており, (ただし, $\sigma_\lambda^\chi \mathsf{p} := \sigma_\lambda(\chi, \mathsf{p})$ とおく)
3. $\sigma_\lambda^\chi : X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ は双正則写像

をみたすとき, $X = \bigcup X_\lambda$ を (σ_λ)-多様体とよぶ. $\lambda_0, \ldots, \lambda_p \in \Lambda$ に対して, $U \subset X$ が $\sigma_{\lambda_0\cdots\lambda_p}$-安定とは, $U \subset X_{\lambda_0} \cap \cdots \cap X_{\lambda_p}$ であり, 任意の $j = 0, \ldots, p$, $\chi \in (\mathbb{Z}_{>0})^n$, $\mathsf{p} \in U$ に対して $\sigma_{\lambda_j}^\chi \mathsf{p} \in U$ が成立することと定める. U の最大 $\sigma_{\lambda_0\cdots\lambda_p}$-安定開部分集合を $U^{\lambda_0\cdots\lambda_p}$ と表す. U を σ_λ-安定開集合とするとき, σ_λ^χ-方向差分商作用素 P とは, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}(U))$ の元であって

$$P(fg) = Pf \cdot g + \sigma_\lambda^\chi f \cdot Pg$$

が, $f, g \in \mathscr{O}(U)$ で成立するもののことである. U 上の $\sigma_{\lambda_i}^\chi$-方向差分商作用素 P $(i = 0, \ldots, p)$ と $\mathscr{O}(U)$ で生成される $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}(U))$ の部分環を $\mathscr{D}_{\sigma_{\lambda_0\cdots\lambda_p}}(U)$ と表す.

定義

$U \rightsquigarrow \mathscr{D}_{\sigma_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}}(U)$ は圏 $Op_{\sigma_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}}(X)$ (対象:$\sigma_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}$-安定開集合, 射:包含写像) から環の圏への反変函手であり, サイト ${}_{(\sigma_\lambda)}X_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}$(圏 $Op_{\sigma_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}}(X)$ を下部圏, 被覆 $\{U_i\}$ としては (σ_λ)-被覆, 即ち $U^{\lambda_0 \cdots \lambda_p} = \bigcup U_i^{\lambda_0 \cdots \lambda_p}$ が, 全ての $p \geq 0$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \Lambda^{p+1}$ で成立する様なもの) 上の層を定める. ${}_{(\sigma_\lambda)}X_p := \coprod_{\lambda_0 \cdots \lambda_p} {}_{(\sigma_\lambda)}X_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}$ 上の層 $\mathscr{D}^p_{(\sigma_\lambda)}$ を

$$\mathscr{D}^p_{(\sigma_\lambda)}(\coprod V_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}) := \prod \mathscr{D}_{\sigma_{\lambda_0 \cdots \lambda_p}}(V_{\lambda_0 \cdots \lambda_p})$$

で, 単体的サイト ${}_{(\sigma_\lambda)}X_\bullet := ({}_{(\sigma_\lambda)}X_p)_{p \geq 0}$ 上の差分作用素の層 $\mathscr{D}^\bullet_{(\sigma_\lambda)}$ を $\mathscr{D}^\bullet_{(\sigma_\lambda)} := (\mathscr{D}^p_{(\sigma_\lambda)})_{p \geq 0}$ で定義する.

これにより, $\mathscr{D}^\bullet_{(\sigma_\lambda)}$ 加群 $\boldsymbol{\mathscr{M}}$ に対し, そのドラーム複体 $DR\boldsymbol{\mathscr{M}} := R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\bullet_{(\sigma_\lambda)}}(\boldsymbol{\mathscr{O}}, \boldsymbol{\mathscr{M}})$ が定義される. 更にこれは, 以下のサイトに「降下」する.

定義

X を (σ_λ)-多様体とする.

1. $U \subset X$ が, σ_λ-安定開集合 V_λ の union $U = \bigcup V_\lambda$ でかけるとき, U は (σ_λ)-開集合であるという.

2. $Op_{(\sigma_\lambda)}(X) :=$ 圏 [対象: (σ_λ)-開集合, 射: 包含写像]

3. ${}_{(\sigma_\lambda)}X :=$ サイト [下部圏: $Op_{(\sigma_\lambda)}(X)$, 被覆族: (σ_λ)-被覆]

自然な射 $a : {}_{(\sigma_\lambda)}X_\bullet \longrightarrow {}_{(\sigma_\lambda)}X$ はコホモロジー降下の射になっていることがわかる. 以上の様にして, q 差分に限らずありとあらゆる差分について, その差分加群上のドラーム複体を ${}_{(\sigma_\lambda)}X$ 上に実現できた. 当初の目標であった, q 差分ドラーム複体が得られることは勿論, それのみならず, Gaußの超幾何函数の Mellin-Barnes 積分表示は, ある差分加群のドラーム・コホモロジーとチェックコホモロジーとの間の同型を記述するものとして捉えられることも得られた.

さて, 全ての $\chi \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ と全ての σ^χ_λ-方向差分商作用素で消えている函数の全体のなす環の層を $\mathscr{C}_{(\sigma_\lambda)}$ と表すことにすると, DR は, $\mathscr{D}_{(\sigma_\lambda)}$ 加群から $\mathscr{C}_{(\sigma_\lambda)}$ 加群への対応を与えている. これは, リーマン・ヒルベルト対応への道を拓いたことになる. 実際, $X = \mathbb{P}^1$ の場合は, 代数的ホロノミック $\mathscr{D}^\bullet_{(\sigma_\lambda)}$ からなる部分圏から偏屈 $\mathscr{C}_{(\sigma_\lambda)}$ 加群のなす部分圏への対応を定めている.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 伊藤公毅	4．巻 40
2．論文標題 qサイクルのホモロジー	5．発行年 2018年
3．雑誌名 雲雀野（豊橋技術科学大学紀要）	6．最初と最後の頁 45-56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　4件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 伊藤公毅
2．発表標題 差分加群とホモロジー
3．学会等名 古典解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Ko-Ki Ito
2．発表標題 Twisted de Rham theory and hypergeometric integral
3．学会等名 UNISTセミナー（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Ko-Ki Ito
2．発表標題 Solution sheaf of q-difference module and its cohomology (Sheaf theoretic q-difference de Rham complex)
3．学会等名 UNISTセミナー（招待講演）
4．発表年 2018年

１．発表者名 Ko-Ki Ito
２．発表標題 Homology of q-cycles
３．学会等名 UNISTセミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 伊藤公毅
２．発表標題 qサイクルのホモロジー
３．学会等名 Workshop on Accessory Parameters
４．発表年 2018年

１．発表者名 伊藤公毅
２．発表標題 qサイクルのホモロジー
３．学会等名 日本数学会年会
４．発表年 2018年

１．発表者名 伊藤公毅
２．発表標題 q差分加群の解層とそのコホモロジー
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2017年

1．発表者名 伊藤公毅
2．発表標題 D加群のq類似に関連して
3．学会等名 函数方程式論サマーセミナー
4．発表年 2017年

1．発表者名 伊藤公毅
2．発表標題 (σ_λ)差分加群の理論の展望
3．学会等名 函数方程式論サマーセミナー
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関