

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 30 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05200

研究課題名(和文) 対数的ホッジ理論の構築・整備と基本図式の幾何への応用

研究課題名(英文) Construction and evolution of log Hodge theory and applications of the fundamental diagram to geometry

研究代表者

臼井 三平 (USUI, Sampei)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：90117002

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：加藤・中山・臼井の共同研究：IVでは様々なコンパクト化の間の関係を示す混合版基本図式を構成した。Vではテンソル関手としての群作用付混合ホッジ構造の分類空間のコンパクト化の場合へ拡張した。VIではlog実解析関数やlog無限級可微分関数を定義しそれらの微分積分を調べ、ホッジ構造の退化とSL(2)軌道定理の幾何学的解釈を深めた。

応用：高次アルバネーゼ多様体のコンパクト化。対数的混合モチーフの圏。Goresky--Taiのreductive Borel--Serreコンパクト化からトロイダルコンパクト化への準同型写像の一般化。Deligne--Beilinson コホモロジーの記述の簡潔化。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Log構造の良さ：Log構造を使って、比と偏角の空間を導入しそれらをホモトピーの立場から捉える。無限遠点での極限というかわりに境界点に立ちそこを中心とした座標を使って見渡せる。退化するホッジ構造族に対して、通常では失われる情報を、log構造を使って微細構造を捉えそれを研究できる。退化で一見減った情報がlog構造を使って回復できる。ミラー対称性との関係が見えてくるようだ。

研究成果の概要(英文)：The joint researches of Kato--Nakayama--Usui continue. In part IV, we constructed fundamental diagram which relates various (partial) compactifications of moduli of mixed Hodge structures. Part V generalized IV for mixed Hodge structures as tensor functors with group actions. In part VI, we defined log real analytic functions and log C infinity differentiable functions, studied their calculus, and understood SL(2)-orbit theorem geometrically. The following are their applications: Compactification of higher Albanese varieties. Category of log (mixed) motives. Generalization of Goresky--Tai homomorphism from cohomology of reductive Borel--Serre compactification to that of toroidal compactification. Simplification of the formulation and the description of Deligne--Beilinson cohomology.

研究分野：ホッジ理論、log幾何学

キーワード：ホッジ理論 log幾何 分類空間 コンパクト化 冪零軌道 SL(2)軌道 Borel--Serre軌道

## 1. 研究開始当初の背景

次のような国際研究集会の中心課題の一つとして取り上げられた。

Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory; Texas Christian University, USA, 2012, June 18-22, Organizers: Robert S. Doran, Greg Friedman, Scott Nollet. <http://faculty.tcu.edu/gfriedman/CBMS2012/>

Recent advances in Hodge theory: Period domains, Algebraic cycles, and Arithmetic, June 10-20, 2013, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, Organizers: James D. Lewis, Matt Kerr, Gregory Pearlstein. <https://www.pims.math.ca/scientific-event/130610-rahtpdaca>

Hodge theory in string theory, 2013/11/18-22, Fields Institute, Toronto, Principal Organizers: Charles Doran, David Morrison, Radu Laza, Johannes Walcher. <https://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/13-14/calabi-yau/hodge/>

Algebraic Geometry, A conference in honor of Arthur Ogus on the occasion of his 70th birthday, 2015/09/23-25, IHES, France, Organizers: Ahmed Abbes, Luc Illusie. <http://www.ihes.fr/~abbes/Ogus/ogus70.html>

Complex, p-adic, and logarithmic Hodge theory and their applications, 2016/03/06-04/29, Simons Center, Stony Brook, USA, Organizers: Mark de Cataldo, Radu Lada, Christian Schnell. <http://scgp.stonybrook.edu/archives/10866>

Algebraic cycles and moduli, 2016/06/02-08, Centre de Recherches Mathematiques, Montreal, Canada, Organizers: Patrick Brosnan, Matt Kerr, Matilde Lalin, Radu Lada, James D. Lewis, Gregory Pearlstein, Colleen Robles. [http://www.crm.umontreal.ca/2016/Cycles16/index\\_e.php](http://www.crm.umontreal.ca/2016/Cycles16/index_e.php)

加藤・臼井は純重みのときに、対数的ホッジ構造の分類空間（加藤・臼井空間）を構成した。またホッジ構造の分類空間のボレル・セールコンパクト化、 $SL(2)$ 軌道の空間を構成し、これら相互の関係を示す基本図式を構成した。さらに中山も加わって先の理論を混合版へ一般化して、変形とともに変位も記述できる対数的混合ホッジ構造の分類空間を構成し、先に出てきた様々なコンパクト化を精密化し、それら相互の関係を示す混合版の基本図式を構成した。これはノーマル関数の情報も含んだ周期写像のさまざまな極限の間の関係を記述している基本的な枠組とみることができる。また群作用付の混合版周期領域の理論への拡張をし、その結果をマンフォード・テイト領域、志村多様体、高次アルバナエゼ多様体へ応用して、これらのトロイダル部分コンパクト化を作った。

加藤・中山・臼井の共同研究による対数的混合ホッジ構造の良モジュライとしてのネロンモデルの理論を使い、臼井は3次元5次超曲面に対する開ミラー対称性を元の多様体のAモデルとミラー対称多様体のBモデルの対数的ノーマル関数の一致として開ミラー対称性の定式化をした。

## 2. 研究の目的

混合ホッジ構造の分類空間の様々なコンパクト化とその間の関係を示す混合版基本図式の構成と整備をしている。この基本図式というのは、混合ホッジ構造の様々な極限と、それら相互の関係を与える写像の収束性や実解析性や複素解析性などを含む詳細な記述である。トレリ型問

題を介して、この基本図式は特異点の問題、多様体の退化の問題、サイクルの変位の問題、モジュライの無限遠での挙動の問題などと関係してくる。また、ミラー対称性をこの枠組の中で捉えてみることにより、様々な収束性に関する理解が深まるものと期待される。さらに、ログ・モチーフの定式化により、ホッジ予想やテイト予想への理解が深まるものと期待される。

### 3. 研究の方法

加藤・中山・臼井の混合版対数的ホッジ構造についての共同研究をメールで、また出会ったのセミナーにより引き続き行う。この共同研究では平成29年度にシリーズのVI 群作用付の混合版対数的周期領域理論への拡張の一般論、および  $On \log$  motives の投稿版を作り、平成30年度以降にはシリーズのV 混合版  $SL(2)$  軌道の空間への周期写像の拡張の実解析性の投稿版を作る。

臼井は混合ホッジ構造の分類空間の様々なコンパクト化のなす基本図式の中で、3次元5次超曲面やレイエ合同とそのミラー族等のカラビ・ヤウ多様体に対して、トレリ型問題とミラー対称性を詳しく調べる。

### 4. 研究成果

(1) 加藤・中山・臼井の混合ホッジ構造とその退化の分類空間に関する共同研究が続いており、そのシリーズIVとしてこの分類空間の様々なコンパクト化の間の関係を示す混合版基本図式の構成と整備をし出版した。この基本図式というのは、混合ホッジ構造の様々な極限と、それら相互の関係を与える写像の連続性や収束性や実解析性や複素解析性などを含む詳細な記述である。これらの構成には、境界点における情報を豊かに保つ対数構造を使う。

(2) 同シリーズVとして、テンソル関手としての群作用付の場合への一般化をした論文を投稿中である。ここではテンソル関手としての群作用付混合ホッジ構造の分類空間のコンパクト化として出てくる冪零軌道の空間、 $SL(2)$  軌道の空間、ボレル・セール軌道の空間とそれらの仲間およびそれらの関係を記述した基本図式の構築と整備をしている。この図式は大きく分けて、左側が複素数体上のはなしで右側が実数体上のはなしとなっており、この二つは、 $SL(2)$  軌道定理を使って作られる連続写像でつながっている。ここがこの基本図式の核心部分であり、この写像を調べるときには、その像である  $SL(2)$  軌道の空間の境界点における群作用を反映した具体的な開近傍の記述が基本的な働きをする。

モノドロミー重さ篩の族ごとに作った  $SL(2)$  軌道の空間の部品を貼り合わせて全体の空間を作った；ワイル扇による対数的変形を使って  $SL(2)$  軌道の空間とボレル・セール軌道の空間をつないだ；グリフィス横断性を持つものの中で対数的混合ホッジ構造を生成するものは強位相の意味で開集合となるということを使って、冪零軌道の空間から  $SL(2)$  軌道の空間への写像の連続性を示した。

(3) 同シリーズVI  $\log$  実解析関数、 $\log$  無限級可微分関数を2023年3月に投稿した。ここでは実解析関数、無原級可微分関数の  $\log$  の意味の適切な拡張を導入しそれらの関数環の上での幾何学を調べた。先ず、 $\log$  混合ホッジ構造の変形と偏極  $\log$  ホッジ構造の変形についての結果を精密化した論文 *Mixed objects are embedded into  $\log$  pure objects*, <https://arxiv.org/abs/2212.10970> を仕上げて2022年12月に投稿した。ついで  $\log$  実解析関数や  $\log$  無限級可微分関数を定義しそれらの積分を調べ  $\log$  Poincaré 補題を証明し

た。ホッジ構造の退化についての理解を深め  $SL(2)$  軌道定理の幾何学的解釈を深めた。

(4) また、 $V$  の応用として高次アルバネーゼ多様体のコンパクト化をした論文を出版した。臼井は、多重対数関数についてのドリーニュの研究結果を高次アルバネーゼ多様体のコンパクト化の枠組で記述し、その論文を出版した。

(5) 伊藤哲史・加藤・中山・臼井の共同研究として対数的モチーフについての論文を出版した。ここでは対数的モチーフの圏と対数的混合モチーフの圏を定義した。前者の圏が半単純ということとこの圏では数値的同値とホモロジー同値が等価であるということが同値になることを証明した。さらに、後者の圏で見た場合には、これらの同値な条件と後者の圏が淡中圏であることが同値であるということを証明した。テイト予想とホッジ予想を定式化し、曲線るとき検証した。

(6) Toroidal compactifications and Borel-Serre compactifications

(<http://arxiv.org/abs/2107.0999>) の論文を仕上げて投稿し arxiv で公表した。テンソル関手としての群作用付混合ホッジ構造の分類空間の境界として冪零軌道、 $SL(2)$  軌道、Borel-Serre 軌道を付け加えた部分コンパクト化とそれらに関係づける亜種空間や写像からなる基本図式を構成した。この中で鍵となるのは、冪零軌道の空間に偏角の情報と比の情報を付け加えた亜種空間に持ち上げてそこから  $SL(2)$  軌道の空間へ連続写像 (CKS map と呼んでいる) を構成したというところである。これらはホモトピーの立場から見ることができ、シリーズ  $V$  の応用として志村 data からくる場合に Goresky-Tai が示した reductive Borel-Serre コンパクト化のコホモロジーからトロイダルコンパクト化のコホモロジーへの準同型写像を構成し一般の場合に拡張できることを示した。

ホッジ構造の周期領域のトロイダルコンパクト化と Borel-Serre コンパクト化の関係を調べて、Goresky-Tai の仕事を深めて一般化した。これを論文: Toroidal compactifications and Borel-Serre Compactifications, <https://arxiv.org/abs/2107.10999> として仕上げて 2021 年 7 月に投稿した。

(7) Log ホッジ理論を使って Deligne-Beilinson コホモロジーの記述を簡潔にした。その相対化を考えて Log ホッジ理論の基本問題をまとめた。これは論文: Deligne-Beilinson cohomology and log Hodge theory として 2023 年に出版した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Usui, Sampei	4. 巻 21
2. 論文標題 A description of a result of Deligne by log higher Albanese map	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 303--321
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5427/jsing.2020.21q	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tetsushi, Ito ; Kazuya, Kato ; Chikara, Nakayama ; Sampei, Usui	4. 巻 2
2. 論文標題 On log motives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tunisian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 733--789
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/tunis.2020.2.733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kato Kazuya, Nakayama Chikara, Usui Sampei	4. 巻 58
2. 論文標題 Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, IV: The fundamental diagram	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 289-426
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2017-0024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kato Kazuya, Nakayama Chikara, Usui Sampei	4. 巻 39
2. 論文標題 Extended period domains, algebraic groups, and higher Albanese manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 “Hodge Theory and $L^2$ -analysis”, Advanced Lectures in Math.	6. 最初と最後の頁 449--471
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 16件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 Relationship of various extensions of period domains with group actions
3. 学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 退化する楕円曲線の積分周期について
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 Degenerating Mixed Hodge structures with group action
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Usui, Sampei
2. 発表標題 Relation among various compactifications of moduli of mixed Hodge structures with group action
3. 学会等名 The Fifth International Conference on History of Modern Mathematics, Xi ' an（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 代数群のホッジ表現のモジュライのコンパクト化
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中山能力
2. 発表標題 Geometric polarized log Hodge structures over the base of log rank one
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤和也
2. 発表標題 Log Hodge structures, log abelian varieties, and log Drinfeld modules
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 Borel-Serre type compactification of moduli spaces of mixed Hodge structures
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 Views through fundamental diagram of classifying spaces of degenerating Hodge structures
3. 学会等名 代数幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nakayama Chikara
2. 発表標題 Log motives and the Hodge realization
3. 学会等名 Log geometry, degenerations and related topics, 2018/02/19--20, 神戸大学（兵庫県）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Usui Sampei
2. 発表標題 Log mixed Hodge structures with group action
3. 学会等名 Log geometry, degenerations and related topics, 2018/02/19--20, 神戸大学（兵庫県）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 臼井三平
2. 発表標題 Description of limits of polylogs by log higher Albanese map
3. 学会等名 代数幾何学ミニワークショップ、2018/01/06--07, 兵庫県多可郡多可町 八千代プラザ（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Usui Sampei
2. 発表標題 Log higher Albanese manifolds (joint with K. Kato, C. Nakayama)
3. 学会等名 Geometric and Algebraic Singularity Theory, 2017/09/10--16, Bedlewo, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中山能力
2. 発表標題 Log Hodge 理論における無限遠点の捉え方 (1) Log higher Albanese manifolds
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」、2017/08/29--30、東京電機大学 東京千住キャンパス (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 白井三平
2. 発表標題 Log Hodge 理論における無限遠点の捉え方 (2) Examples
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」、2017/08/29--30、東京電機大学 東京千住キャンパス (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 白井三平
2. 発表標題 Log mixed Hodge theory and geometry
3. 学会等名 東京電機大学数学講演会、2017年5月22日、東京電機大学 東京千住キャンパス (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	中山 能力  (NAKAYAMA Chikara)  (70272664)	一橋大学・大学院経済学研究科・教授    (12613)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------