

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 15 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05205

研究課題名(和文) 楕円曲面と平面曲線のトポロジー及びその応用

研究課題名(英文) Elliptic surfaces and the topology of plane curves

研究代表者

徳永 浩雄 (Tokunaga, Hiroo)

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：30211395

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：射影直線上の楕円曲面 S には「一変数有理函数体上の楕円曲線 E の Kodaira Neron モデル」と「有理曲面の2次被覆」の二つの視点から捉えることができる。本課題では、前者の視点から、 E の有理点および因子に関する楕円曲線上の数論的性質を S 上の曲線の性質に翻訳し、多重切断を構成した。続いて、後者の視点の2次被覆を利用し、被覆写像を用いて楕円曲面上の曲面から有理曲面上の曲線を構成し、そのトポロジカルな性質を調べた。具体的な応用として様々なタイプの Zariski pair を構成した。さらに、因子を明示的に扱う際に用いた因子の Mumford 表現の様々な応用や更なる可能性を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

楕円曲面は代数幾何学、特に代数曲面の研究、においては重要な位置を占めている対象である。小平邦彦による楕円曲面の研究以来、その研究手法も含めて多くの研究者が扱ってきた。楕円曲面には、「幾何学研究」としての対象という側面と、函数体上の楕円曲線という「数論的研究」としての対象という側面がある。本研究においてはまず、数論的側面から研究を行い、それを平面代数曲線のトポロジーという幾何学への応用を目指した。これまで、多くの研究者が「幾何学的性質の研究結果を数論的研究へ応用」という流れで研究を行ってきたが、本課題では、応用数学分野の手法を取り入れ「逆」の流れで研究を進め成果を上げている点に意義がある。

研究成果の概要(英文)：An elliptic surface S over the projective line has two aspects: the Kodaira Neron model of an elliptic curve E over the field of rational functions of one variable and a double cover of a certain rational surface. We start the first aspect: we translate some arithmetic properties of rational points and divisors on E into geometric ones on S . Then we go onto the second: we use the double cover to construct curves on rational surfaces and to study the topology of such curves. As applications, we construct various Zariski pairs. Moreover, we find the Mumford representations of divisors on E , which are useful in explicit treatment of curves, has more possibility to further applications.

研究分野：代数幾何学

キーワード：楕円曲面 多重切断 Zariski pair Mordell-Weil群 Zariski N -ple 楕円曲線

1. 研究開始当初の背景

2017年当初は、それ以前の代表者の研究により、アーベル・ヤコビ写像を用いて楕円曲面の曲線を構成する手法について研究が始まりつつあり、さらに分解数、連結数と呼ばれる新たな不変量が登場した時期でもあった。これらの不変量は、共に Galois 分岐被覆を用いて定義されている。こうした状況のもと、本課題では、平面代数曲線のトポロジー、特に埋め込み位相の研究に関して、2次被覆をハブとして、整数論的な視点、分解数や連結数という新たな不変量を有機的に関連させて研究を展開することが目的とした(このテーマを代表者は「2次被覆の数論的研究とその応用」と称している)。その際、楕円曲面に関する理論・様々な成果を従来の「幾何学から整数論へ」の流れの逆「整数論から幾何学へ」を取る点も通奏低音となる視点である。

2. 研究の目的

平面曲線のトポロジー、本課題においては埋め込み位相の研究は、1929年の Zariski の論文以降、様々な研究者が手掛けてきた。本課題においては主たる研究対象は「Zariski pair = 組み合わせ論的なデータは等しいが、埋め込み位相が異なる平面曲線の組」である。'90年代、Zariski pair の研究は既約な平面曲線を中心に始まった。その後、研究が進むにつれ、可約な平面曲線も広く対象となった。とりわけ、直線配置(line arrangement)、2次曲線配置(conic arrangement)およびそれらの混合型 conic-line arrangement の Zariski pair が盛んに研究され始めた。本課題では、これらの次数の低い既約成分からなる可約な曲線の場合の研究が主たる目的である。Zariski pair の研究は、

(I) 候補となる曲線の構成

(II) 様々な不変量を用いたトポロジーの区別

の二つの段階がある。平面曲線は3変数の同次多項式を与えると構成できる。しかしながら、Zariski pair の研究ではステップ(I)で背後にある何らかの原理がわかるような構成法—例えばこれまでに知られた Zariski pair の幾何学的な違いを統一的に説明できるような構成法—が、ステップ(II)で適用する不変量の計算を行う際には重要である。そこで背後にある構造をうまく説明できる新たな構成法の確立が重要な目標となる。本課題では楕円曲線上の群構造を様々な形で用いるアプローチをとった：

(1) 有理楕円曲面を射影平面の2次被覆として捉え、有理楕円曲面 S の生成ファイバーとして現れる楕円曲線 E_S の有理点や因子の数論的な性質を利用して曲線を構成する。さらに曲線の構成の前段階として、 E_S の有理点、因子の具体的処理方法も必要であり、超楕円曲線暗号の研究で用いられる手法を取り入れる。

(2) 既約成分として非特異3次平面曲線が含まれる場合、その群構造の積極的に取り入れる。さらにこのアイデアを一般の非特異平面曲線に拡張する。

3. 研究の方法

本課題において、代数多様体は特に断りが無い限り、複素数体 \mathbb{C} 上で定義されたものを扱う。

(1) 楕円曲面の生成ファイバーの数論的性質を用いた曲線の構成と応用。

前項(1)にある目的に出てくる楕円曲面についてまず説明する。非特異射影的代数曲面 S が非特異射影曲線 C 上の楕円曲面であるとは、 C への相対極小な全射 $\pi: S \rightarrow C$ で以下の条件を満たすものが存在するときをいう：(イ) の一般のファイバーは種数1の非特異曲線であり、かつ、少なくともひとつのファイバーは種数1の非特異曲線ではない、(ロ) π は切断 O をもつ。この設定元では、楕円曲面 $\pi: S \rightarrow C$ の生成ファイバーは C の有理函数体 K 上の楕円曲線 E_S となっている。仮定により、 E_S の K -有理点全体の集合 $E_S(K)$ は、 O から定まる有理点を含むので空ではなく、可換群(Mordell-Weil 群)の構造が入る。さらに $E_S(K)$ は $\pi: S \rightarrow C$ の切断全体の集合と同一視できる。曲面 S の幾何学的側面と数論の対象の $E_S(K)$ を直接関係づける最初の出発点は塩田徹治氏による以下の定理である：

定理(塩田) $NS(S)$ は S の Neron-Severi 群 (S 上の既約曲線を基底として生成された自由加群の代数的同値による同値類群)とし、 T は O 、 $\pi^{-1}(O)$ のファイバー F 及び $\pi^{-1}(O)$ のファイバーに含まれる既約曲線で O と交わらないもので生成される部分群とする。このとき、 $NS(S)/T$ から $E_S(K)$ への自然な同型が存在する。

上記定理の証明は、 E_S 上において S の因子 D が定義する K 上の因子に対し、アーベル・ヤコビ写像 π による像 $\pi_*(D)$ を対応させることで証明される。塩田の定理は $NS(S)$ 、 T という幾何学的に定義される群と $E_S(K)$ という整数論的な群を結びつけるものとみなすことができるが、この定理の同型を与えるアーベル・ヤコビ写像を様々な場合に詳細に分析することが目的を達成には不可欠となる。本課題で具体的に考察する際は S が有理楕円曲面、すなわち、 S が有理曲面であるとき(有理楕円曲面)が主たる対象となっている。この場合、 C は必然的に射影直線 P^1 となる。本課題においては、塩田、小木曾-塩田による結果を用いつつ、さらなる幾何学的考察を加えて

平面曲線の構成法およびその性質の研究を進めた。

(2) 非特異平面 3 次曲線の群構造を用いた構成

非特異平面 3 次曲線 C は、変曲点を一つ固定してすれば、よく知られた方法でアーベル群の構造が入る（通常の楕円曲線）。この群構造は他の曲線 D との（重複度込みの）交点集合にも反映されることを利用し、平面の曲線の構成を行った。

4. 研究成果

前項で述べた手法に沿って得られた研究成果に述べる

(1) 楕円曲面生成ファイバーの数論的性質を用いた曲線の構成とその応用について

このテーマについては、5 本の論文を出版した。

[1] Geometry of bisections of elliptic surfaces and Zariski N -plets II, *Topology and its Applications.*, 231(2017), 10 - 25

本論文では既約 4 次曲線と二つの 2 次曲線からなる 8 次曲線に関する Zariski 5-tuple (pair 毎に Zariski pair を与える 5 つ組) の例を与えた。本論文において具体例の構成で用いた手法は長楕円曲線暗号の研究で用いられている Mumford 表現の特別な場合である。このオブザベーションは以後の Mumford 表現を用いた楕円曲面の多重切断の研究及びその応用に関する研究の出発点となった。

[2] Elliptic surfaces and contact conics for a 3-nodal quartic, *Hokkaido Math. J.*, 47 (2018), 223-244

本論文では 3 つの node を持つ 4 次曲線 Q とその contact conic について研究を行った。contact conic と Q の接点 z を固定すると、有理楕円曲面 S_{Qz} が自然に定まり、contact conic は S_{Qz} の生成ファイバーの有理点を与える。本論文では contact conic と有理点の性質を調べ、いつ Zariski pair の候補となるかという条件を調べた。

[3] A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines, *Hiroshima Math. J.* (2019) 289-302.

非得意 4 次曲線とそのいくつかの 2 重接線に関する Zariski pair, triple を構成した。楕円曲面の Mordell-Weil 格子の minimal ベクトルの性質、連結数と部分配置の数え上げ、分解数と部分配置の数え上げを用いた。

[4] Rational points of elliptic surfaces and the topology of cubic-line, cubic-conic-line arrangements, *Hokkaido Math. J.* (2020), 87-108.

本論文においても、楕円曲線の有理点に関連して得られる直線及び 2 次曲線を用いて Zariski pair を構成した。Zariski pair の判定では、直線や 2 次曲線から定まる Mordell-Weil 群の元が満たす性質が鍵となっている。

[5] Elliptic surfaces of rank one and the topology of cubic-line arrangements, *J. Number Theory* (2021), 174-189.

[4] であげた論文の続編とも言えるものである。ただし、楕円曲面上の多重切断やそのアーベル・ヤコビ写像の像に関する手法を導入している点が大変大きい。多重切断の研究は、本課題に続く現在の研究課題へと引き継がれている。

(2) 楕円曲線の群構造を用いた Zariski N -ple に関する研究。

[1] On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 93 (2017), 50-53.

[2] Zariski N -ples for a smooth cubic and its bitangent lines, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 96 (2020), 18-21.

上記の 2 本の論文では、共に 3 次曲線の複数の接線の接点と 3 次曲線上の群構造を利用して Zariski N -ple の構成を行なった。なお、本論文の手法を一般化し、下記の成果を得ている。現時点では掲載は決定しているが、印刷中である。

・ (with E. Artal Bartolo, S. Bannai and T. Shirane) Torsion divisors of plane curves with maximal flexes and Zariski pairs, *Mathematische Nachrichten* 印刷中。

・ (with E. Artal Bartolo, S. Bannai and T. Shirane) Torsion divisors of plane curves and Zariski pairs, *St. Petersburg Math. J.* 印刷中。

なお、本課題に関連して、11 件の研究発表を行なった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 S. Bannai, H. Tokunaga and M. Yamamoto	4. 巻 49
2. 論文標題 Rational points of elliptic surfaces and the topology of cubic-line, cubic-conic-line arrangements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 87--108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1591085013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Bannai and H. Tokunaga	4. 巻 221
2. 論文標題 Elliptic surfaces of rank one and the topology of cubic-line arrangements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 174--189
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2020.06.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Bannai, H. Tokunaga and M. Yamamoto	4. 巻 49
2. 論文標題 A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 289--302
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/hmj/1564106549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Bannai and H. Tokunaga	4. 巻 96
2. 論文標題 Zariski N-plets for a smooth cubic and its tangent lines	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 18--21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.96.004.	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Khulan Tumenbayar and Hiro-o Tokunaga	4. 巻 47
2. 論文標題 Elliptic surfaces and contact conics for a 3-nodal quartic	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 223-244
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1520928068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S.Bannai, B.Guerville - Balle, T.Shirane and H.Tokunaga	4. 巻 93
2. 論文標題 On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 50-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 S.Bannai and H.Tokunaga	4. 巻 231
2. 論文標題 Geometry of bisections of elliptic surfaces and Zariski n -plets II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 10-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.09.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Hiroo Tokunaga
2. 発表標題 On the topology of cubic-line, quartic-line arrangement
3. 学会等名 Seminar Komplexe Geometrie, Ruhr Universitaet Bochum, Bochum, Germany (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroo Tokunaga
2. 発表標題 On the topology of cubic-line arrangements
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics, 高知工科大学, 永国寺キャンパス (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroo Tokunaga
2. 発表標題 On m-contact curves to a cubic: Mumford representations and divisions
3. 学会等名 代数幾何セミナー, 高知工科大学, 永国寺キャンパス
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroo Tokunaga
2. 発表標題 Construction of n-contact curve to a cubic and Zariski tuple
3. 学会等名 Geometries in Pyrenees, Unviersite de Pau et des Pays de l'Aour (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 2次被覆のarithmetic と平面代数曲線のトポロジー
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 The topology of plane curves and arithmetic of P^2 ,
3. 学会等名 15th International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 On the topology of plane curves and arithmetic of P^2
3. 学会等名 Seminario de Algebra, Geometria y Topologia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 A remark on certain cubic-line arrangements and elliptic surfaces
3. 学会等名 On hyperplane arrangements, configuration spaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 Rational points of elliptic surfaces and cubic-line arrangements
3. 学会等名 Seimiario Geometria y Topologia, Universidad de Zaragoza (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 楕円曲面の有理点とcubic-line arrangements
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺, 高知大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 徳永浩雄
2. 発表標題 Arithmetic of double covers of P^2 -the topology of reducible plane curves-
3. 学会等名 A walk between hyperplane arrangements, computer algebra and algorithms, 北海道大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	アータルバルトロ エンリケ (Artal Bartolo Enriqe)		
連携研究者	白根 竹人 (Shirane Taketo) (70615161)	徳島大学・理工学部・講師 (16101)	
連携研究者	坂内 真三 (Bannai Shinzo) (20732556)	岡山理科大学・理学部・准教授 (35302)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	吉永 正彦 (Yoshinaga Masahiko) (90467647)	大阪大学・理学研究科・教授 (14401)	
連携研究者	阿部 拓郎 (Abe Takurou) (50435971)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授 (17102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
Branched coverings, degenerations and related topics	2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
スペイン	Universidad de Zaragoza		