

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05206

研究課題名（和文）トロピカル幾何を軸とする代数多様体と特異点の総合的研究および工学への応用

研究課題名（英文）Comprehensive study of algebraic varieties and singularities and their applications to engineering centered on tropical geometry

研究代表者

小林 正典（Kobayashi, Masanori）

東京都立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：60234845

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：トーリックトロピカル多様体に対する付点モノイドによる定式化などの基礎的事実について整理し、代数幾何におけるF1代数や冪等可換半環について順序加群の関係を意識しながらまとめ、さらに今後の特異点理論への応用を目指した研究を行った。シュスチンらによる固定したニュートン多面体の超曲面族のトロピカル化の結果との関連を調べた。工程計画問題への応用について、トロピカル多項式から元のネットワーク構造の情報を引き出す研究を継続した。この分野における研究集会を若手で開催できるよう援助を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで代数幾何においては当然とされてきた可換環の枠組みについて反省し、概型理論が成立する最小の代数系で理論構築を行うことで、証明の簡略化や本質の抽出ができる知識伝授ができるようになった。また国内でのトロピカル幾何の研究集会の当面の常設化ができた。工程計画問題等、応用数学・工学において、ニュートン多面体を介した幾何的手法が導入できる新たな方向性を提示した。

研究成果の概要（英文）：Basic facts such as the formulation by pointed monoids for toric tropical manifolds are summarized, and F1-algebras and unipotent commutative semirings in algebraic geometry are discussed with an awareness of the relation to ordered additive groups, and further research is conducted for future applications to singularity theory. The connection with the results of Shustin et al. on the tropicalization of hypersurface families of fixed Newtonian polyhedra is investigated. For applications to scheduling problems, we continued our research on extracting information on the original network structure from tropical polynomials. Assisted in organizing a meeting in this field by young researchers.

研究分野：代数幾何学

キーワード：トロピカル幾何

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

トロピカル代数は通常の数環から「超離散化(脱量子化)」で得られる。これは時間・空間のみならず関数の値も離散化したもので、和が最大値、積が通常の足し算になる。この  $(\max, +)$  代数は情報数学でもトロピカル代数として研究されていた。トロピカル代数を関数半環とする新しい幾何学がトロピカル幾何学である。

【トロピカル幾何学の基礎】F1 代数や可換冪等半環といった代数系はすでにあつた。ただしそれを用いた代数幾何学の構築は流儀もありまとまっていたとは言えなかつた。

【トロピカル幾何学の発展】古典的結果の証明がトロピカル幾何学により著しく簡略化された例として、射影平面内の有理曲線の数え上げ (Mikhalkin), Brill - Noether の定理 (Cools et al.) があつた。

【トロピカル幾何学の応用】工程計画問題で、最短完了時間のニュートン多面体をもとにクリティカルパスの隣接関係を導入していた。

### 2. 研究の目的

本研究では、ミラー対称性を背景として、関係する代数幾何学的対象を、導来圏と超離散化を特徴的な手法として統一的・多面的に研究し、さらに工学等の他分野に応用することを目指した。具体的には次の2つのテーマについてそれぞれ基礎と応用を考察することを目的とした。

#### I. トロピカル幾何学

(基礎) 組合せ論的代数幾何学の研究: モノイドを用いた圏論的組合せ論的な多様体の構成。

(発展) 射影的トロピカル幾何学: トロピカル多様体の射とコホモロジー理論の研究。

(応用) 工程計画問題

への応用: トロピカル幾何学を用いたクリティカルパスの分類等の研究。

#### II. K3 曲面・特異点

(基礎) K3 曲面・特異点のミラー対称性と導来圏の研究: 特異点の爆発および変形による解消データの導来圏における記述。

(発展) 実特異点の爆発解析同値の研究: 平面曲線等のより詳細な分類。

(応用) 学習理論への応用: 新しい有用なモデルの構築。

### 3. 研究の方法

当初想定していた研究方法は以下の通りである。

「ミラー対称性からの着想を得ながら、超離散化と圏論的手法を道具として、代数多様体、特にトロピカル多様体・K3 曲面・特異点の研究を行う。また、それに基づき工学における斬新な応用を提案していく。基本的には研究代表者と連携研究者が必要に応じて情報収集をしながら行う。研究集会や勉強会の開催、講演者の招聘を通じて、広い分野の研究者との相互作用を引き起こし、新たな研究テーマを発掘していくことも目指す。また研究援用のためポスドクを雇用する計画である。」

しかしコロナ禍のため、さまざまな研究集会で参加者の間での議論を深めて成果を上げていくという手法が途中からまったく取れなくなり、計画の大幅な修正を余儀なくされた。オンラインでは講演以外での交流が十分にできない。そのため、数名の研究者を1名ずつ招聘して対面で議論する、ということを行った。2021年度からは、共同研究者と2名で行っていたオンラインセミナーを、お互いをよく知っているメンバーに拡張して行った。

#### 【トロピカル幾何学の基礎】

2018年9月17日から10月19日までと、2019年2月12日から2月24日までマンハイム大学に滞在し、研究発表と議論を行うことで理解を深めた。

2021年度、2022年度には都立大に研究者を1名ずつ数回招聘してトロピカル幾何学の基礎についての議論を行った。

#### 【トロピカル幾何学の発展】

2017年4月から8月まで Falko Gauss 氏 (マンハイム大) を学振特別研究員 (欧米短期) として受け入れ、トロピカル曲線などについての共同研究を行った。

2017年8月8日の首都大学東京におけるトロピカル幾何学研究会で講演者旅費と茶菓子代の援助を行った。

2018年2月1日に京都大学で研究会「トロピカル幾何学ワークショップ」を共催した。

2018年8月2日から20日までリオデジャネイロで国際数学会議およびその衛星会議である研究会「トロピカル幾何学とモジュライ」に参加した。

2018年12月21日と22日に首都大学東京で「第二回トロピカル幾何ワークショップ」を共催した。これらでトロピカル幾何に関する最新の情報を収集し、研究者との情報交換に大いに努めた。

2019年8月10日から8月13日まで東京大学玉原国際セミナーハウスで研究集会「代数幾何学サマースクール2019」(テーマ:熱帯曲線・曲面の幾何)を共催し、主として代数曲線のブリル・ネーター理論の古典・トロピカル同時証明の論文紹介を行いつつ、若手を中心とした研究者との情報交換に大いに努めた。

#### 【トロピカル幾何の応用】

2018年6月6日から7月末までソルボンヌ工科大学からフランス人実習生1名を受け入れ計算機を用いた計算を行った。その際ポスドクを1名雇用した。

上記のリオの研究集会には共同研究者1名も同行し議論と情報収集を行った。

2018年9月4日に日本応用数学会(名古屋大学)で招待講演を行った。

2019年2月4日から3月8日までシドニー大学に出張して研究発表を行い特異点に関するいくつかの問題について議論した。

2019年9月に(日大)特異点セミナーにおいて「トロピカル幾何と、その代数幾何等への応用について」という題で講演を行った。

2020年は例年通り計画していた東京大学玉原国際セミナーハウスにおける合宿型の代数幾何に関する勉強会も、実施が不可能となった。なお代わりに、2021年1月14日・15日にトロピカル幾何を研究する指導する大学院生を中心にオンラインでの研究会を実施した際、ZOOMのサポートおよび助言を行った。

2022年2月21日・22日に東京都立大学において行われたトロピカル幾何ワークショップの開催を援助した。

#### 【その他】

2017年8月21日から25日まで玉原東京大学国際セミナーハウスで研究集会「代数幾何学サマースクール2017」(テーマ: Bridgeland 安定性と壁越え)を共催した。その際情報収集の補助のため大学院生1名を同行させた。

2017年10月の城崎代数幾何学シンポジウムには指導する大学院生1名を派遣し情報収集補助を行った。これらの活動を通じて、トロピカル幾何を中心とする代数幾何の情報収集を行った。

2018年7月28日から8月1日まで東京大学玉原国際セミナーハウスで研究集会「代数幾何学サマースクール2018」(テーマ: 特異点の正規化体積と不変量)を共催した。その際情報収集補助のため大学院生1名を同行させた。

2018年10月6日から8日まで高知工科大学で行われた研究集会「射影代数多様体の幾何とその周辺」がドイツ出張と重なったため情報収集を依頼した。

2019年6月に名古屋大学で行われた代数幾何の研究集会において、研究代表者が参加できなかったため情報収集を依頼した。

2019年10月には代数幾何全般の最新知識を得て議論するため城崎代数幾何シンポジウムに参加した。

2020年3月には上記の研究を基に、中高生対象の数理の翼セミナーでトロピカル幾何の入門講義を行った。

## 4. 研究成果

研究の目的Iのトロピカル幾何に関わる研究に集中したといえる。

【トロピカル幾何の基礎】出発点として、梶原・Payneのトーリックトロピカル多様体に対する付点モノイドによる定式化、などの基礎的事実について整理した。この部分は、2017年度に首都大学東京と東北大学で基礎的な講義を行った。この内容の講義は国内では珍しい。

その後、代数幾何におけるF1代数や冪等可換半環について順序加群の関係を意識しながらまとめ、さらに今後の特異点理論への応用を目指した研究を行った。特異点論を純粋にトロピカル幾何から行う場合、局所代数が一意分解整域にならないため、既約分解すらおぼつかないという困難がある。一方で、べき級数は付値との相性が良いため、まずはべき級数のホモトピーの考察を行った。他方で、Shustinらによる固定したニュートン多面体の超曲面族のトロピカル化の結果との関連を調べた。これは今後の研究に直結する内容である。

トロピカル幾何の話題を含む代数学に関する書籍を一点出版した。

【トロピカル幾何の発展】種数の小さなトロピカル曲線の詳細な分類についてまとめ、2017年度に東北大学談話会で研究発表を行った。

【トロピカル幾何の応用】工程計画問題への応用について、トロピカル多項式から元のネットワーク構造の情報を引き出す研究を継続した。2018年度には工程が7個の場合の分類を、雇用したポスドクが計算機を用いて実行した。

2020年10月20日から23日までオンラインで行われた城崎代数幾何学シンポジウムにおいてトロピカル幾何とその工程計画問題への応用について研究発表を行った。この報告集は京都大学のリポジトリ紅よりオンライン出版された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 小林 正典	4. 巻 2020
2. 論文標題 Tropical geometry and its application to scheduling problem	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 代数幾何学シンポジウム記録	6. 最初と最後の頁 106-114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 小林正典
2. 発表標題 Tropical geometry and its application to scheduling problem
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小林正典
2. 発表標題 トロピカル幾何と、その代数幾何等への応用について
3. 学会等名 日本大学文理学部 月曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小林正典
2. 発表標題 Max-Plus代数からトロピカル幾何へ、最近の進展と工程計画問題への応用
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度年会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanori Kobayashi
2. 発表標題 From Max-Plus algebra to tropical geometry, with an application to scheduling problem
3. 学会等名 Geometry seminar, Mannheim University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanori Kobayashi
2. 発表標題 Application of tropical geometry to scheduling problem
3. 学会等名 Geometry & Topology Seminar, University of Sydney (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小林正典
2. 発表標題 「トロピカル曲線論」に向けて
3. 学会等名 東北大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 小林正典	4. 発行年 2017年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 192
3. 書名 SGCライブラリ136臨時別冊・数理科学 例題形式で探求する代数学のエッセンス 方程式から広がる世界	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

## 6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 第二回トロピカル幾何ワークショップ	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 トロピカル幾何ワークショップ	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第5回トロピカル幾何ワークショップ	開催年 2023年～2023年

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------