

令和 5 年 4 月 28 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05209

研究課題名(和文)局所関数等式を満たす多項式の特徴付けの研究

研究課題名(英文)Characterization of polynomials which satisfy local functional equations

研究代表者

小木曾 岳義 (Kogiso, Takeyoshi)

城西大学・理学部・教授

研究者番号：20282296

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：局所関数等式を満たす多項式のペアの研究について、以下の研究成果を得た。
 (1) homaloidal多項式の極化に付随する局所関数等式の明示的決定と極化による概均質性が保たれることの証明
 (2) 非概均質でも局所関数等式を満たす多項式の極化の考察
 (3) 係数付きクラスター代数に付随するF-多項式の各斉次部分の概均質性の考察と射影多様体との関係の考察(4)
 Catalecticant行列式の切断の概均質性の考察(5)終結式、一般化終結式と概均質ベクトル空間との関係

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所関数等式の研究は整数論では保型形式、ゼータ関数などの整数論の研究で重要であり、今までの流れでは局所関数等式を満たす多項式のタイプはそれらの分野では概均質タイプのみしか扱ってこなかったが、非概均質タイプまで含めた今回の研究は今までにないタイプの局所関数等式やその背後にある空間の特性を調べたものなので、整数論で、新しい現象の発見につながることを期待できる。表現論の分野では、概均質ベクトル空間は群が reductiveであるが、今回の研究では群がSolvableなものも含んでいて局所関数等式が多変数になり、等質錐に付随するLaplace-Fourier変換との関係など大いに期待される。

研究成果の概要(英文)：The following research results were obtained on pairs of polynomials satisfying local function equation.

(1) Explicit determination of local function equation associated with polarization of homaloidal polynomials and proof that prehomogeneity is maintained by polarization(2) Observation of polarization of polynomials satisfying local functional equation even if they are non-prehomogeneous homogeneous(3) Observation of prehomogeneity of each uniform part of F-polynomials associated with cluster algebra with coefficients and observation of their relationship with projective manifolds(4) Observation of prehomogeneity of a section of Catalecticant determinant(5) Relationship between resultant and generalized resultants and prehomogeneous vector space

研究分野：表現論と整数論

キーワード：局所関数等式 概均質ベクトル空間 ゼータ超関数 Clifford quartic form polarization F-多項式
 Catalecticant homaloidal多項式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

局所関数等式を満たす多項式のペアを見つけることは整数論、表現論双方の分野で重要である。既約正則概均質ベクトル空間の非退化な相対不変多項式とその双対の概均質ベクトル空間の、同じ有理指標に対応する相対不変多項式のペアは局所関数等式を満たすことが佐藤幹夫氏、多変数の場合は佐藤文広氏により見つけられている。そのため、今までの研究で、まだ明示的に概均質ベクトル空間の相対不変の形が分かっていないものについて、その明示的な構成を行うなどの研究が続けられて来た。具体的には、佐藤幹夫氏と木村達雄氏によって既約正則概均質ベクトル空間が分類され、その相対不変式が一部を除いて構成されていたが、その残りのうち 40 次元のカスピダル型の holonomy 図形が最も複雑な空間の相対不変を明示的に写像の合成によって報告者(小木曾)は天野氏、藤上氏とともに明示的に構成した。また、既約正則概均質ベクトル空間の次の段階の分類として 2 単純概均質ベクトルの分類が木村達雄氏を中心に行われていたが、その相対不変式の明示的な形は与えられていなかったで、その構成を完成するという研究を行なって来た。一方、2008 年に佐藤文広氏と報告者(小木曾)の共同研究で、Clifford 代数の表現から構成した 4 次形式 Clifford Quartic forms は非概均質的多項式であるにも関わらず局所関数等式を満たすことが示されていて、Clifford Quartic form に付随する空間も分類されている。

上記のことから局所関数等式を満たす多項式を概均質、非概均質を含む形で特徴付ける必要があり、それに向けての研究を行ってきた。

2. 研究の目的

概均質、非概均質双方を含む homaloidal 多項式のペアは、局所関数等式を満たすことは未だ証明はされていないが、今まで知られている例で局所関数等式を満たしていることから、homaloidal 多項式の特徴付けをする方向性で研究をおこなった。

3. 研究の方法

(戦略 1) 概均質、非概均質双方について既知の局所関数等式から新しい関数等式を導き出す。
(戦略 2) 各分野に現れる斉次多項式からスタートし、その多項式が局所関数等式を満たす多項式かどうかを判定する上記の 2 つの研究戦略に従って研究を実行した。

4. 研究成果

(戦略 1) に沿った研究で得られた研究成果は、Etingof, Kazhdan, Plishchuk により homaloidal 多項式の極化もまた homaloidal 多項式であることが示されているが、佐藤文広氏と小木曾の共同研究によって、homsloidal 多項式が概均質である場合には、それに何度極化を繰り返しても概均質的多項式であり、それによる局所関数等式の変化も明示的に求めた。一方、homaloidal 多項式が非概均質の場合は、局化によって、非概均質性が保持されるかどうかは未だ証明出来ておらず、今後の課題であるが、非概均質的多項式である Clifford Quartic form については何度極化を繰り返しても非概均質であることが佐藤文広氏との共同研究で示されている(論文 [[Kyushu J. Math. 72 \(2018\), no. 2](#), 307–331]) で発表)。

(戦略 2) に沿った研究での研究成果は、(2-1) 係数付きクラスター代数の F-多項式から概均質ベクトル空間の相対不変式を拾い出す研究をおこなった。この研究の過程で、A 型クイバーに付随する有理結び目の和久井道久氏との研究も役に立っている。それは [[Osaka J. Math. 59 \(2022\), no. 2](#), 341–362], [[J. Knot Theory Ramifications 28 \(2019\), no. 14](#), 1950083, 40 pp.] などで発表している。またこの研究の流れで概均質ベクトル空間の裏返

し変換に関するマルコフ方程式の q -変形と有理数の q -変形と双曲幾何に関係に関するマルコフ方程式の q -変形を発見し、その相互関係も関係考察している。(

(2-2) 代数幾何の射影多様体の定義多項式に関連する Catalecticant 行列 generalized Catalecticant 行列の行列の切断から概均質ベクトル空間を拾い出す研究である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Takeyoshi Kogiso, Michihisa Wakui	4. 巻 59(2)
2. 論文標題 A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag type by rational links	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1--27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takeyoshi Kogiso and Michihisa Wakui	4. 巻 28
2. 論文標題 A bridge between Conway Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216519500834	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takeyoshi Kogiso and Fumihito Sato	4. 巻 72
2. 論文標題 Local Functional Equations attached to the polarizations of homaloidal polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 307--331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takeyoshi Kogiso	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Kauffman bracket polynomials associated to Conway-Coxeter Friezes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of Meeting for the study of Number theory, Hopf algebras and related topics	6. 最初と最後の頁 83-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 小木曾岳義	4. 巻 56
2. 論文標題 Homaloideal 多項式の極化に付随する局所関数等式	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第56回実関数論・関数解析合同シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 31-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 小木曾岳義	4. 巻 10
2. 論文標題 Conway-Coxeter Friezeを用いた有理絡み目図式のKauffman bracket多項式の計算レシピ	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 結び目の数学X報告集	6. 最初と最後の頁 91-108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計25件(うち招待講演 24件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のある種の q -変形とそのいくつかの応用
3. 学会等名 神戸可積分セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のある種の q -変形とそのいくつかの応用
3. 学会等名 大阪大学大学院理学研究科談話会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Homaloidal 多項式はどこに存在するか？
3. 学会等名 大阪大学整数論・保型形式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 q-Deformation of continued fractions and its application to the Markov equation and further generalization
3. 学会等名 Kyoto automorphic form workshop（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 q-Deformation of continued fractions and its application to the Markov equation
3. 学会等名 The 2nd Meeting for Number theory, Hopf algebras and related topics（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のq-変形のいくつかの応用とPV との接点
3. 学会等名 東北大学代数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Cluster algebras and Knot invariants
3. 学会等名 金沢大学代数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Where do homaloidal polynomials appear?
3. 学会等名 室蘭工業大学整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 "q-Deformations of continued fractions and Knot-invariants
3. 学会等名 トポロジーとコンピューター（招待講演）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のq-変形とその応用
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 q-Deformation of a continued fraction and its applications
3. 学会等名 東大数理トポロジー 火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のq-変形と特殊関数
3. 学会等名 表現論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 連分数のq-変形とそのMarkov方程式への応用
3. 学会等名 Meeting for Number theory, Hopf algebra and field (招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Local functional equations of homaloidal polynomials,
3. 学会等名 Seminare Theorie de Lie, Geometrie at Analyse, Nancy, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Clifford quartic forms and its applications
3. 学会等名 Seminare Theorie de Lie, Geometrie at Analyse, Metz, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Local functional equations of homaloidal polynomials,
3. 学会等名 Laboratoire de Mathematitiques de Reims , Reims , France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Cluster algebras and Knot invariants,
3. 学会等名 Meeting of number theory,ring theory, Hopf algebratheory and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 団代数と結び目多項式
3. 学会等名 表現論ワークショップ
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Snake graph, Conwa--Coxeter frieze, 有理結び目の関係
3. 学会等名 Knotting Nagoya 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Homaloidal多項式の極化に付随する局所関数等式
3. 学会等名 第56回実関数論・関数解析合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 3次元概均質ベクトル空間の裏返し変換から得られる結び目多項式とその応用
3. 学会等名 研究集会「概均質ベクトル空間の分類とその周辺」、秋田大学教育学部 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Kauffman bracket polynomials of Conway Coxeter Friezes
3. 学会等名 研究集会、「結び目の数学X」、東京女子大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Recipe for making Kauffman bracket by using cluster algebras of type A, B
3. 学会等名 表現論ワークショップ(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小木曾岳義
2. 発表標題 Recipe for making Kauffman bracket by using cluster algebras of classical types
3. 学会等名 さきがけ研究集会「行列解析の展開・2」、名古屋大学大学院多元数理科学研究科(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeyoshi Kogiso
2. 発表標題 Local functional equations of homaloidal polynomials
3. 学会等名 Seminar de Institut Elie Cartan, Lorraine University, Nancy(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------