

令和 4 年 6 月 1 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05214

研究課題名（和文）ミラー対称性とモジュライ空間の幾何学の関連の理解の深化

研究課題名（英文）Deeper Understanding of Relations between Mirror Symmetry and Geometry of Moduli Spaces

研究代表者

秦泉寺 雅夫（Jinzenji, Masao）

岡山大学・自然科学学域・教授

研究者番号：20322795

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の成果で最も重要なのは、長年の懸案であった複素射影空間の超曲面の種数0のグロモフ・ウィッテン不変量に対するミラー予想の幾何学的証明を、私自身が構成した擬写像のモジュライ空間とその交点数に関する結果を総動員して書き上げたことである。その証明は意外にも簡潔にまとめられたのであるが、現在も証明を発表した論文は学術雑誌において審査が継続中で、今後の動向が注目されることである。その他にも、院生との共同研究で、ミラー対称性の研究を深めるとともに、より広い視点で数理論理学と幾何学の関連を追及する研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題期間中において、私は2冊の著書を出版した。一つは、古典的ミラー対称性の紹介とそれに関する私の研究結果を併記した英語の本で、本研究課題の成果を広く社会に紹介する上で大きな役割を果たしたと言える。もう一つは、物理学生のために複素幾何学を紹介する専門書で、これは私がミラー対称性の研究をする上で使ってきた知識を後進の人達に伝える目的で書かれたものである。今後、このような本が必要とされる機会は増えると思われ、その意味でも大いに学術的意義、社会的意義があるとアピールしたいところである。

研究成果の概要（英文）：Most important achievement in this research project is the geometrical proof of the mirror theorem of genus 0 Gromov-Witten invariants of projective hypersurfaces, which was done by applying all the previous results on intersection numbers of moduli space of quasimaps constructed by myself. The paper that presents the proof is still under reviewing process, and I have to care about how the proof is evaluated by mathematical community. On the other hand, I collaborated with graduate students in my laboratory and published several papers not only on mirror symmetry but also on new topics that connect mathematical physics with geometry.

研究分野：数理論理学 幾何学

キーワード：ミラー対称性 モジュライ空間 擬写像 トーリック幾何学 複素幾何学 交点数 過剰交叉 コンパクト化

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は擬写像のモジュライ空間の大まかな構成と、そのモジュライ空間の交点数の計算方法はある程度確立できていたが、モジュライ空間のトーリックオービフォールドとしての厳密な構成や、そのチャウ環の導出は出来ていなかった。また、私が目指していた擬写像の交点数をグロモフ・ウィッテン不変量に翻訳するという描像での射影超曲面のグロモフ・ウィッテン不変量に対するミラー定理の幾何学的証明も不透明な段階であった。以上のような理由で、私独自の方向での擬写像のモジュライ空間を用いたミラー対称性の研究を継続しなければならなかった。

2. 研究の目的

私の提案した擬写像のモジュライ空間に、トーリック幾何学を用いた厳密な構成を与え、チャウ環等の幾何学的な情報を系統的に導出できるようにする。また、懸案の射影超曲面のグロモフ・ウィッテン不変量に対するミラー定理の幾何学的証明を完成させる。

3. 研究の方法

擬写像のモジュライ空間のトーリック幾何学を用いた厳密な構成については、私の院生との共同研究、あるいは博士論文指導を通じて研究を進めて行く。また、ミラー定理の幾何学的証明については、私自身の計算機を併用した計算結果を積み上げて行きながら、もっと効率の良い考え方も模索していく事にする。

本来の研究の方向とは異なるのであるが、期間中に研究に関する本の執筆を依頼されることになったので、これを引き受け、研究の進展に刺激を与えるとともに、社会への研究成果の啓蒙にも努めることにする。

4. 研究成果

2017年度は、英文による著書「classical mirror symmetry」の執筆を行なった。これは、古典的ミラー対称性の理解に必要な背景知識、古典的ミラー対称性の仮説に基づいたグロモフ・ウィッテン不変量の計算の手順、および私の近年の研究成果である、古典的ミラー対称性による計算過程を擬写像のモジュライ空間の観点から再構成する結果をまとめたものである。本は、2018年5月に出版された。後、長年の懸案であった、複素射影空間内の超曲面のミラー対称性の計算において鍵となる、ミラー変換の公式の幾何学的証明の概略をプレプリントとして発表した。この論文においては、これまでの方針であったコンチェビッチの固定点定理を用いた煩雑な計算による証明を押し通す事をやめ、擬写像のモジュライ空間の交点数を計算する際に現れる過剰交叉の寄与を摂動空間を導入することにより評価するという方針を導入し、極めて簡潔なミラー変換の証明を提示した。また、院生の齋藤氏と共同で、2点付き CP^1 から重み付き射影空間 $P(1,1,1,3)$ への擬写像のモジュライ空間のチャウ環を決定し、そのモジュライ空間の交点数の母関数が楕円曲線の j 関数の逆関数に一致する事を証明する結果をプレプリントとして発表した。この論文において用いた擬写像のモジュライ空間の交点数を初等的な留数積分を用いて計算する手法は、交点数がミラー対称性の計算に用いられる超幾何関数の展開係数に一致する事の簡潔な証明を与える。この手法は、前述した著書でも取り上げたが、今後広い応用が期待される。

2018年度はミラー対称性の啓蒙活動として重要な意味を持つ、複素幾何学の解説を主題とする書籍の執筆を行った。この本は、まず実多様体論の解説とその位相幾何学の展開に必要なホモロジー論と微分形式のド・ラムコホモロジーの解説から始まる。その後、複素関数論を導入し、複素多様体を導入する。ここでは、正則性により複素多様体には実多様体に比べて「剛性」という性質が加わることが強調される。更に、この剛性により複素多様体上の微分形式が実多様体のそれとどのように異なるかが解説され、その後正則ベクトル束の理論や層の理論が解説される。最後に、これらの道具を用いてミラー対称性でも使われる複素多様体の複素構造の変形理論を簡単に解説して終わる。なお、この本は2019年の夏頃に出版された。

2019年度は、まず私が以前構成した2点付き CP^1 から $CP^1 \times CP^1$ への擬写像のモジュライ空間について、厳密なトーリック多様体としての定義を与え、コンパクトなオービフォールドである事を厳密に証明する論文を院生の松坂氏に書かせるよう指導した。これは、直接私の実績となる仕事ではないが、今後このような形の仕事は増えていくであろう。その他、ポットの留数定理を経路積分を用いて証明する論文とオイラーの五角数定理とその拡張をコホモロジー的観点をを用いて証明する論文をそれぞれ院生の桑田氏、田嶋氏との共著によりプレプリントの形で発表した。

2020年度は、種数1のグロモフ ウィッテン不変量に対して、私がこれまで構築した多項式写像(擬写像)のモジュライ空間を用いたミラー対称性の計算過程の幾何学的再構成理論を拡張する研究を行った。得られた現在までの成果の一つは、カラビ ヤウ多様体の場合について、B模型(BCOV理論)から得られるミラー変換を行う前段階の母関数の展開係数を全く別の観点から再現する留数積分表示が得られた事である。ただ、この留数積分表示は、展開係数を再現するのはわかっているが、まだ擬写像のモジュライ空間を構成してその空間の位相的交点数として導出できるかどうかが不確定であるので、まだ公にはしていない状況である。もう一つの成果として、以前構成していた CP^2 の種数0のグロモフ ウィッテンに対するミラー対称性的計算方法を、種数1のグロモフ ウィッテンに対して拡張する際となるB模型のグロモフ ウィッテン不変量の留数積分表示を得た事が挙げられる。これは、カラビ ヤウ多様体の場合と類似点はあるが、少し性格の異なる積分表示で、2021年の1月頃に発見した。この結果は、カラビ ヤウ多様体ではないファノ多様体に対してBCOV理論を拡張できる可能性を示唆しており、今後も追及して行きたい。なお、この留数積分表示も幾何的導出ができていないため公にはしていない。なお、これらの結果は、一応2021年2月に京都大学数理解析研究所の非公式セミナーで言及しておいた。後、前述した別々の学生との共著による2編の論文(一つは桑田氏との共著で、もう一つは齋藤氏との共著である)が、学術雑誌に受理され一つは出版され、もう一つは2021年度に出版された。

2021年度は院生の今西氏、桑田氏とともに、ウィッテンの位相的ヤン ミルズ理論の有限次元版とみなせる理論を構成し複素グラスマン多様体 $G(k, N)$ のオイラー数を求めるという研究の仕上げを行い、成果をプレプリントの形で発表した。その研究の副産物として、複素グラスマン多様体のコホモロジー環を何の関係式も仮定しない有限個のグラスマン変数を用いて実現する方法(自由フェルミオン表現)を発見した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masao Jinzenji, Hayato Saito	4. 巻 -
2. 論文標題 Moduli Space of Quasi-Maps from P^1 with Two Marked Points to $P(1,1,1,3)$ and j -invariant	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan (掲載予定)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/83148314	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masao Jinzenji, Ken Kuwata	4. 巻 35
2. 論文標題 Holomorphic Vector Field and Topological Sigma Model on CP^1 World Sheet	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Modern Physics A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0217751X20501924	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 秦泉寺 雅夫	4. 巻 56巻10月号
2. 論文標題 素粒子物理とカラビ・ヤウ多様体：一物理学院生が代数幾何学に巻き込まれた経緯	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 29--35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Masao Jinzenji
2. 発表標題 Geometrical Proof of Generalized Mirror Transformation of Projective Hypersurfaces
3. 学会等名 Rikkyo MathPhys 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masao Jinzenji
2. 発表標題 Geometrical Proof of Generalized Mirror Transformation of Projective Hypersurfaces
3. 学会等名 Seminar in National Center of Theoretical Sciences Physics Division (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 秦泉寺雅夫	4. 発行年 2021年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 214
3. 書名 数物系のためのミラー対称性入門【電子版】	

1. 著者名 秦泉寺雅夫	4. 発行年 2019年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 232
3. 書名 物理系のための複素幾何入門	

1. 著者名 Masao Jinzenji	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 140
3. 書名 Classical Mirror Symmetry	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------