

令和 4 年 6 月 4 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05216

研究課題名(和文) 複素2次元特異点の位相型と解析的不変量の研究

研究課題名(英文) Topological types and analytic invariants of complex surface singularities

研究代表者

奥間 智弘 (Okuma, Tomohiro)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：00300533

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、2次元正規特異点の基本的な解析的不変量や特異点の構造について調べることであった。Brieskorn 完全交叉特異点について、極大イデアルの正規節減数の公式を与え、楕円型特異点の分類した。Brieskorn 完全交叉特異点に同相で特徴のある特異点の例を与えた。錐型特異点について、正規節減数の簡明な上限を与えた。また、楕円型イデアルおよび強楕円型イデアルを導入し、基本的性質を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体や複素解析空間には特異点が存在する。特異点の性質を捉えることで、それらの深い理解につながることもある。本研究は2次元特異点を対象に、基本的な解析的不変量や特異点の構造について、より詳しい結果を得るとともに、新たな研究課題を見出している。これらの成果はこれからの研究の進展に寄与するものと思われる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to study fundamental analytic invariants and the structure of normal surface singularities. For Brieskorn complete intersection singularities, we obtained a formula of the normal reduction number of maximal ideals and classified the elliptic singularities. We gave examples of certain distinguished structures of singularities which are homeomorphic to a Brieskorn complete intersection singularity. For cone singularities, we obtained a simple formula of the normal reduction number. We also introduced elliptic ideals and strongly elliptic ideals and obtained their basic properties.

研究分野：複素特異点論

キーワード：2次元特異点 幾何種数

## 1. 研究開始当初の背景

2次元正規特異点の位相型は特異点解消グラフと同等である。解析的不変量または環論的不変量を具体的に記述することや位相不変量による評価を与えることが基本的な問題である。

Neumann-Wahl が導入したスプライス商特異点について、特異点解消グラフから幾何種数と重複度を計算する方法が与えられていた。また、特異点解消グラフが有理曲線の木に対応するような擬斉次特異点について、埋め込み次元を計算する方法が知られていた。Brieskorn 完全交叉特異点の極大イデアルサイクルを定義式から決定する方法も得られていた。これらの解析的不変量の記述は Artin の有理特異点の研究、Laufer の最小楕円型特異点の研究以来、2次元特異点論において重要なテーマとなっている。

極大イデアルサイクルについては、都丸正氏と泊昌孝氏による Brieskorn 完全交叉特異点の理論の一般化や2重点に関する精密な研究成果が得られていた。また、特異点解消グラフが有理曲線の木に対応するような特異点の位相型を固定したときに、幾何種数の最大値を求める研究が Nemethi 氏によって進められ、非退化超曲面特異点や超孤立特異点を含むいくつかのクラスでグラフの不変量としての記述が得られた。しかし、Nemethi-Okuma により、単純な位相型でありながら、同様の記述が成立しない特異点の例が得られ、より精密な方法が必要になった。

特異点の解析的不変量の研究においては、特異点解消空間上のイデアル層のコホモロジーを捉えることがしばしば重要な問題となる。それらのコホモロジーの研究が Okuma-Watanabe-Yoshida による正規節減数の研究に関連しながら進展しつつあった。また、幾何種数イデアルが導入され、様々な良い性質が明らかになっていた。

## 2. 研究の目的

本研究では、2次元正規特異点の幾何種数や重複度、極大イデアルサイクルなどの基本的な解析的不変量またはその評価を位相不変量で記述し、それらの解析的不変量が最大値または最小値をとるような複素構造の特徴や環論的性質をとらえることを目標とする。さらに、特異点解消空間上のイデアル層のコホモロジーの次元をとらえる方法を発展させる。特異点解消空間上の幾何学と環論的な方法を合わせた手法を導入する。

## 3. 研究の方法

2次元特異点の不変量について、複素解析的、代数幾何学的、可換環論的な観点から研究する。そのために、研究集会等でそれらの観点をもつ研究者と交流し、新たな視点を得ることが重要である。国内外で開催された様々な研究集会等に参加するために旅費を使用した。また、関連する分野の知識を得るために文献を購入した。

特異点の局所環の理論、特にイデアルの正規節減数の理論などについて、渡辺敬一氏、吉田健一氏、Maria Evelina Rossi 氏と協力し、幾何と可換環論の観点から研究を行った。

Brieskorn 完全交叉特異点に関する研究では、Konno-Nagashima、Meng-Okuma による特異点解消空間や極大イデアルサイクルや基本種数の記述に関する結果を応用した。また、Tomari-Watanabe によるフィルター付き局所環および Pinkham-Demazure 構成の理論を用い、解析的不変量の解析と特異点の構成を行った。

正規節減数の研究においては、特異点解消空間上のイデアル層のコホモロジーの次元をとらえることが重要である。Okuma-Watanabe-Yoshida による、特異点解消上の Koszul 複体を用いる手法や Laufer の計算列の手法を合わせて解析を行った。

## 4. 研究成果

(1) Brieskorn 完全交叉特異点について、極大イデアルの正規節減数の簡明な公式を与えた。その結果を応用し、楕円型 Brieskorn 完全交叉特異点の分類を与えた。楕円型は3変数の5つの系列および4変数の一つの系列しかないことが明らかになった。さらに、Brieskorn 完全交叉特異点の極大イデアルの正規節減数が2ならば、2個の例外型を除いて楕円型特異点になることを示した。

(2) Brieskorn 完全交叉特異点の最小良特異点解消の中心曲線の種数が1以下である場合に、極大イデアルサイクルが基本サイクルに常に等しいことを示し、その幾何種数が同じ位相型を持つ特異点の幾何種数の最大値を実現することを示した。

(3) 星形の特異点解消グラフで記述される位相型を固定したときに最大の幾何種数を持つ構造として、超楕円型特異点の概念を導入した。

(4) Brieskorn 完全交叉特異点と同じ位相型を持つ特異点の解析的不変量と複素構造を調べた。任意の位相型に対して、その位相型を持つ、極大イデアルサイクルと基本サイクルが一致するような擬斉次特異点が存在することを示した。最小良特異点解消の中心曲線の種数が 2 であり、極大イデアルサイクルと基本サイクルが一致しない Brieskorn 完全交叉特異点の位相型を一つ固定し、極大イデアルサイクルと基本サイクルが一致する複素構造、および幾何種数が最大になる複素構造をとらえた。特に、その位相型はウェイトタイプが異なる 2 種類の擬斉次完全交叉特異点の構造を許容することを示し、具体的な定義式を与えた。その例は、Brieskorn 完全交叉特異点と同じ位相型を持つ特異点の幾何種数の最大値を実現するとは限らないことも示している。さらに、極大イデアルサイクルが最小となるような擬斉次特異点を分類し具体的に構造を記述した。

(5) 最小特異点解消の例外集合が非特異曲線になる特異点について、正規節減数の簡明な上限を与え、正規節減数と例外曲線のゴナリティとの関連を示した。その結果を応用し、斉次超曲面特異点に対して正規節減数の簡潔な公式を示した。また、2 種類の正規節減数の違いを明確に示す例を環論的方法と幾何学的方法の二通りで与えた。ある種の特徴的なイデアル層のコホモロジーの計算手法を与えるとともに、次元公式を示した。

(6) 幾何種数イデアルは、有理特異点のイデアルが持つ特徴を備えたイデアルである。その楕円版ともいえる楕円型イデアルおよび強楕円型イデアルを導入した。ヒルベルト多項式の係数や幾何種数などを用いた特徴づけを与えるとともに、基本的性質を示した。さらに、強楕円型イデアルの存在条件を幾何学的に与え、それを満たす例と満たさない例を与えた。また、幾何種数が 1 の場合に、交点数を用いた正規イデアルの判定法を与えた。その方法はある種の条件を満たすイデアルに対しては、幾何種数が 2 以上の楕円型特異点でも有効であることが分かっている。楕円型イデアルは良い性質を持っているが未知の部分も多く、興味深い対象である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Okuma Tomohiro, Watanabe Kei-ichi, Yoshida Ken-ichi	4. 巻 149
2. 論文標題 The normal reduction number of two-dimensional cone-like singularities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4569 ~ 4581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15565	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 T. Okuma	4. 巻 61
2. 論文標題 Cohomology of ideals in elliptic surface singularities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Illinois J. Math.	6. 最初と最後の頁 259--273
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Okuma Tomohiro, Watanabe Kei-ichi, Yoshida Ken-ichi	4. 巻 44
2. 論文標題 Normal Reduction Numbers for Normal Surface Singularities with Application to Elliptic Singularities of Brieskorn Type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 87 ~ 100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-018-00311-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 A. Nemethi and T. Okuma	4. 巻 24, No. 2
2. 論文標題 Analytic singularities supported by a specific integral homology sphere link	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Methods Appl. Anal.	6. 最初と最後の頁 303-320
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/MAA.2017.v24.n2.a7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Okuma Tomohiro, Watanabe Kei-ichi, Yoshida Ken-ichi	4. 巻 499
2. 論文標題 A characterization of two-dimensional rational singularities via core of ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 450 ~ 468
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2017.11.053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Okuma Tomohiro	4. 巻 23
2. 論文標題 Weighted homogeneous surface singularities homeomorphic to Brieskorn complete intersections	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 170-193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2021.23j	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Okuma Tomohiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Normal Reduction Numbers of Normal Surface Singularities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Singularities and Their Interaction with Geometry and Low Dimensional Topology . Trends in Mathematics.	6. 最初と最後の頁 159 ~ 179
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-61958-9_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Okuma, Tomohiro and Rossi, Maria Evelina and Watanabe, Kei-ichi and Yoshida, Ken-ichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Normal Hilbert coefficients and elliptic ideals in normal two-dimensional singularities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1 ~ 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2022.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 奥間智弘
2. 発表標題 複素 2 次元特異点の基本的な解析的不変量について
3. 学会等名 日本数学会東北支部会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tomohiro Okuma
2. 発表標題 Normal reduction numbers of normal surface singularities
3. 学会等名 Geometry and Topology of Singularities--- In honor of Andras Nemethi's 60th birthday（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomohiro Okuma
2. 発表標題 Normal reduction numbers and cohomology of normal surface singularities
3. 学会等名 Algebraic surfaces and related topics---In honor of Kazuhiro Konno's 60th birthday（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 奥間智弘
2. 発表標題 Weighted homogeneous surface singularities homeomorphic to Brieskorn complete intersections
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Okuma
2. 発表標題 Cohomology of ideals in normal surface singularities
3. 学会等名 International Conference on Singularity Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥間智弘
2. 発表標題 位相型が等しくタイプが異なる複素2次元特異点について
3. 学会等名 第60回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥間智弘
2. 発表標題 Cohomology of ideal sheaves on resolutions of surface singularities
3. 学会等名 2017年度多変数関数論冬セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	渡辺 敬一  (Watanabe Kei-ichi)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	吉田 健一  (Yoshida Ken-ichi)		
連携研究者	都丸 正  (Tomaru Tadashi)  (70132579)	群馬大学・その他部局等・名誉教授   (12301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関