様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ０５２２１

研究課題名（和文）様々な空間の中の曲面上の主分布

研究課題名（英文）Principal distributions on surfaces in various spaces

研究代表者
安藤　直也（Ando, Naoya）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：５０３５９９６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：4次元ニュートラル多様体および4次元Lorentz多様体内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的または時間的曲面の等方性を調べた．特に，3次元平坦Lorentz空間形内の時間的極小曲面の共形Gauss写像は等方的だがツイスター・リフトの共変微分が光的であることがわかった．3次元Euclid空間内の極小曲面の共形Gauss写像についても類似の理解を得た．
4次元Euclid空間内の極小曲面のGauss写像の正則性に関する結果の一般化および類似物を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
4次元空間内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的または時間的曲面の等方性についてのまとまった理解を得ることができ，またWillmore曲面上の正則4次微分および共形Gauss写像の理解が大いに進んだ．
4次元Euclid空間内の極小曲面のGauss写像の正則性は良く知られている．この結果を一般化でき，また空間の種類をLorentzやニュートラルとしても類似の結果および一般化が得られた．

研究成果の概要（英文）：I studied isotropicity of space-like or time-like surfaces with zero mean curvature vector in neutral or Lorentzian 4-manifolds. In particular, in the neutral case, the isotropicity of time-like surfaces with zero mean curvature vector does not necessarily mean horizontality of the twistor lifts and the covariant derivatives of the lifts of the conformal Gauss maps of time-like minimal surfaces in the 3-dimensional flat Lorentzian space form are light-like. In the Lorentzian case, I defined isotropicity and obtained related results.
I obtained analogues of holomorphicity of the Gauss maps of minimal surfaces in the Euclidean 4-space and their generalizations.

研究分野：微分幾何学，曲面論

キーワード：零平均曲率ベクトル　等方性　正則4次微分　ツイスター・リフト　共形Gauss写像　Willmore曲面　Gauss写像

１．研究開始当初の背景

(1) 本研究課題申請時，擬 Riemann 空間形内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面上に定義される正則 4 次微分 Q に注目していた．これは第二基本形式を用いて定義され，空間の次元が 3 の場合には Hopf 微分とそれ自身のテンソル積である．曲面上の主分布に着目して曲面の研究を行ってきた私にとって，Q に着目したことはごく自然なことである．

私が以前から関心を持っていた Willmore 曲面上には正則 4 次微分が定義される．Willmore 曲面の共形 Gauss 写像は非臍点集合上で 4 次元 de Sitter 空間 S^4_1 への零平均曲率ベクトルを持つ空間的はめこみなので，非臍点集合上に正則 4 次微分 Q を定義する．これら二つの正則 4 次微分の関係は論点の一つである．Willmore 曲面上の正則 4 次微分が恒等的に零であることと，非臍点集合上で共形 Gauss 写像の光的法ベクトル場の一つが一定方向を向いていることは同値であり，このことは Willmore 球面に関する結果（[18]）を導く上で基本的である．

また，空間が Riemann で次元が 4 の場合，極小曲面上の正則 4 次微分 Q が恒等的に零であることと，極小曲面が等方的であることは同値である．極小曲面の等方性はツイスター・リフトの一つの水平性と同値であり（[21]），特に S^4 内の極小球面に関する結果（[17]）が知られている．また E^4 内の極小曲面が等方的であることと E^4 の標準的な複素構造に関する複素曲線と合同であることは同値であり，複素曲線は曲面上の誘導計量およびある正則 3 次微分により特徴づけられる（[3]）．Kähler 曲面内の複素曲線は強等方的（等方的で空間の向きに適合する）極小曲面で少なくとも一つの複素点を持つものであり，逆も成り立つ（[5]）．

(2) 曲面上の孤立臍点の指数が 1 以下であるという予想は基本的であり重要である．本研究課題申請時に C^1 臍点の指数は任意の半整数を取り得るという結果が得られていた（[14]）．

(3) 3 次元 Riemann 空間形内の曲面で臍点を持たず主曲率が零にならないものについて，その各点の近傍上で過剰決定系が定義され，その解の集合は誘導計量および主分布によって決まり，曲面の主曲率はその系の解を与える．

系が整合条件を満たすならば，任意に与えられた初期値に対し一意解を持つ．空間が E^3 の場合，それぞれの解に対応する曲面は molding であると言われていて，曲率線の族の一つが測地線からなり（[20]，[19]，[10]），また主方向平行である（[1]）．空間が非平坦である場合，それぞれの解に対応する曲面の曲率線の族の一つが測地線からなるとは限らない（[11]）．

系が整合条件を満たさないならば，解は高々二つ存在する．系がちょうど二つの解を持つための条件は，空間が E^3 の場合には sinh-Gordon 方程式を用いて与えられ（[4]），空間が非平坦である場合にも得られた（[11]）．零ではない一定平均曲率を持つ曲面で回転面に含まれないものの上の過剰決定系はちょうど二つの解を持つ．また，系が「重解」を持つための条件が，空間が E^3 の場合には方程式 $f_{uu}+f_{vv}=e^{-2f}$ を用いて与えられ（[2]），空間が非平坦である場合にも得られた（[11]）．回転面に含まれない極小曲面上の過剰決定系は「重解」を持つ．

２．研究の目的

(1) 擬 Riemann 空間形内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面について，曲面上の正則 4 次微分 Q と誘導計量の観点で，曲面が完備またはコンパクトである場合の分類を目指す．また，Kähler 多様体内の複素曲線に着目して，非平坦複素空間形内の極小曲面論を構築する．

(2) Loewner の予想および Carathéodory の予想の解決を目指す．また，孤立臍点の指数の一般化を擬 Riemann 空間形内の空間的曲面上で定義し，類似或いは一般の結果を目指す．

(3) 3 次元 Riemann 空間形内の曲面上の過剰決定系に関して得られている結果に基づいて，4 次元空間形内の空間的曲面上で過剰決定系を定式化し，類似或いは一般の結果を目指す．

３．研究の方法

(1) 擬 Riemann 空間形内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面上の正則 4 次微分 Q を中心に調べる．また，共形 Gauss 写像の類似物として値域が 4 次元反 de Sitter 空間や Minkowski 空間であるものを構成し，また Willmore 曲面上の正則 4 次微分の類似物を見出す．そして Willmore 曲面上の二つの正則 4 次微分の関係を明らかにする．

(2) 孤立臍点の指数が 1 以下かどうかについては[14]等を参考に調べる．また擬 Riemann 空間形内の一般の空間的曲面上で複素 4 次微分を定義できるので，その孤立零点の指数を調べる．

(3) 空間の次元が 3 の場合の結果を参考にして，次元が 4 の Riemann または Lorentz 空間形内の空間的曲面上の誘導計量およびある法ベクトル場に関する主分布の観点で過剰決定系の理論の構築を行なう．

４．研究成果

まず，３次元 Riemann 空間形内の曲面の共形 Gauss 写像の類似物として値域が４次元反 de Sitter 空間 H^4_1 や Minkowski 空間 E^4_1 であるものを構成した（[6]）．このことに基づいて，Willmore 曲面およびその上の正則４次微分の類似物を見出した（[6]）．そしてこのような正則４次微分と共形 Gauss 写像（の類似物）が導く正則４次微分 Q は零ではない定数倍を除いて等しいことがわかった（[6]）．また E^3_1 内の（空間的）Willmore 曲面について，その正則４次微分が恒等的に零であることはこの曲面が空間的極大曲面の E^3_1 のある反転による像であることと同値であることを示した（[15]）．

向きづけられた４次元ニュートラル多様体 N 内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面の等方性は曲面上定義される複素４次微分 Q が恒等的に零であることで特徴づけられる（[13, 7]）．また，強等方性を N に付随する空間的ツイスター空間のうちの適切なものへのリフトの水平性で特徴づけた（[7]）．上記のような曲面が等方的ならば，空間が Riemann の場合と同様に，この場合も必要ならば空間の向きを選び直すことによって曲面は強等方的になる．N がニュートラル Kähler の場合，N 内の複素曲線は零平均曲率ベクトルを持ち強等方的でかつ少なくとも一つの複素点を持つものであり，逆も成り立つ（[7]）．特に $N=E^4_2$ の場合に，N 内の複素曲線を誘導計量およびある正則３次微分の観点で特徴づけた（[7]）．

元々この研究課題では曲面は空間的であることを前提としていた．しかし，以下に記すように，時間的な曲面も調べ，このことによって時間的な曲面の理解だけでなく空間的な曲面の理解も進み，そして想定よりも多くの理解が得られたと考えている．

曲面が時間的な場合，まず Riemann 面の類似物である Lorentz 面を定義する必要があった．向きづけられた４次元ニュートラル多様体 N 内の零平均曲率ベクトルを持つ時間的曲面の等方性は曲面上定義されるパラ複素４次微分 Q が恒等的に零であることで特徴づけられる（[13, 7]）．また零平均曲率ベクトルを持つ時間的曲面の強等方性は，N に付随する時間的ツイスター空間のうちの適切なものへのリフトの水平性で特徴づけられる（[7]）が，等方的であったとしてもいずれのツイスター・リフトも水平とは限らず，リフトの共変微分は光的で有り得る．時間的曲面について，値域が S^4_2，H^4_2，E^4_2 であるような共形 Gauss 写像の類似物を見出すことができた．このことに基づいて，Willmore 型時間的曲面を定義しまたその上の正則なパラ複素４次微分を見出した（[7]）．さらにこのような正則４次微分と共形 Gauss 写像の類似物が導く正則４次微分 Q は零ではない定数倍を除いて等しいことがわかった（[7]）．また E^3_1 内の Willmore 型時間的曲面について，その正則４次微分が恒等的に零であることはこの曲面が時間的極小曲面の E^3_1 のある反転による像であることと同値であることを示した（[15]）．特に E^3_1 内の時間的極小曲面で Gauss 曲率が零ではないものの共形 Gauss 写像は S^4_2 への時間的はめこみで零平均曲率ベクトルを持ち $Q\equiv 0$ を満たすが，この共形 Gauss 写像のリフトの共変微分は光的である（[7]）．これらの結果に基づいて，向きづけられた４次元 Lorentz 多様体内の空間的曲面で零平均曲率ベクトルを持つものの等方性についての理解が得られた（[9]）が，その前に空間が Riemann 或いはニュートラルの場合に次の段落で説明される結果が得られた（[13]）．次の段落の結果は空間が Lorentz の場合に得られた後述の結果に関連する．

E^4 内の極小曲面の Gauss 写像は正則であることが知られている．この一般化として，４次元超 Kähler 多様体内の極小曲面のツイスター・リフトの一つは正則関数によって与えられることを示した（[13]）．また，４次元ニュートラル超 Kähler 多様体内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的または時間的曲面に対しても同様の結果を得た（[13]）．特に空間が E^4_2 の場合，このような曲面の Gauss 写像はやはり正則であることがわかる．向きづけられた４次元 Riemann 多様体内の極小曲面の二つのツイスター・リフトがツイスター空間の曲率テンソルの核に含まれるならば，曲面上の複素４次微分 Q は正則であることを示した（[13]）．さらにツイスター・リフトが水平でないならば，曲面の接束および法束の局所正規直交標構場を選ぶことで，それぞれの接続形式が co-closed になり，さらにこれらを整合条件とする過剰決定系の解を用いて第二基本形式が構成されることがわかった（[13]）．なお空間が空間形であれば，曲率テンソルについての条件は満たされる．空間が Riemann ではなくニュートラルの場合，曲面が空間的ならば同様の結果が得られる（[13]）．また曲面が時間的である場合，二つのツイスター・リフトがツイスター空間の曲率テンソルの核に含まれるならば，曲面上のパラ複素４次微分 Q は正則であり，またツイスター・リフトの水平性に関わらず第二基本形式は４つの常微分方程式の族の解を用いて構成される（[13]）．向きづけられた４次元ニュートラル多様体内の零平均曲率ベクトルを持つ時間的曲面で，二つのツイスター・リフトの共変微分が光的であるものは，次のいずれかを満たす（[13]）：(i)ある光的法ベクトル場の型作用素は零である；(ii)全ての型作用素が零または光的である．３次元 Lorentz 空間形内の Willmore 型の時間的曲面でその正則４次微分が零であるものの共形 Gauss 写像は(i)のような曲面を与え，また４次元ニュートラル空間形内の(ii)のような曲面の特徴づけを Gauss-Codazzi-Ricci の方程式に基づいて与えた（[13]）．

向きづけられた４次元 Lorentz 多様体内の空間的曲面のリフトを定義した（[9]）．曲面のリフトは二つあり，各リフトは曲面上の引き戻し束の２重外積束内のあるファイバー束の切断である．各ファイバーは曲面の各点での空間の接空間の２重外積空間の光錐のある超曲面である．空間は４次元 Lorentz 多様体なので，接空間の２重外積空間には符号が(3,3)の計量が導かれる．

上の超曲面の次元は4であり，符号が(2,2)の計量が導かれる．空間がMinkowski空間E^4_1であるとする．このとき曲面の各リフトはE^4_1の2重外積空間の光錐のある超曲面への写像である．この超曲面上には各ベクトル場が平行であるような擬正規直交標構場が存在することがわかった（[9]）．特に超曲面は平坦でありかつニュートラル超Kählerである．曲面が零平均曲率ベクトルを持ちかつ空間的である場合，そのリフトはいずれも上述の超曲面のニュートラル超Kähler構造が与えるある複素構造に関して正則であることがわかった（[9]）．曲面が時間的な場合にも曲面のリフトを定義でき，空間がE^4_1で曲面が零平均曲率ベクトルを持つ場合にはいずれのリフトも上述の超曲面のニュートラル超Kähler構造が与えるあるパラ複素構造に関して正則な写像であることがわかった（[9]）．これらの結果は前段落で記されたE^4内の極小曲面およびE^4_2内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的または時間的曲面のGauss写像の正則性の類似物とみなされる．

向きづけられた4次元Lorentz多様体内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面の等方性および強等方性を定義した（[9]）．これらは4次元Riemann多様体および4次元ニュートラル多様体における等方性および強等方性の類似物であり，特別な局所複素座標の取り方に基づく．また後者は曲面のリフトが定める混合型構造（複素構造の類似物）を必要とする．一般には，等方的であることは，曲面上の複素4次微分Qが零であるまたは強等方的であることと同値である（[9]）．$Q\equiv 0$は第二基本形式が零または光的であることと同値であり，またリフトの共変微分による特徴づけを持つ（[9]）．リフトの曲率テンソルによる像が零であるとする．このときQは正則である（[9]）．さらに曲面が全測地的な点を持たないとする．法接続の曲率およびQが零ならば曲面は強等方的である（[9]）．また，強等方的ならば，法接続の曲率および接束の接続形式の余微分は零であり，第二基本形式はこれらを整合条件とする過剰決定系の解により構成される（[9]）．空間が4次元Lorentz空間形ならば，等方性，強等方性および$Q\equiv 0$は互いに同値である（[9]）.曲面が時間的な場合には部分的に類似の結果が成り立つが，一方で等方性と強等方性は同値であり（[9]），Qが恒等的に零ならば全測地的である．また，空間が空間形であり曲面が等方的ならば全測地的である（[9]）．

以上により，向きづけられた4次元Riemann，Lorentzまたはニュートラルな多様体内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的または時間的曲面の等方性，強等方性についてのまとまった理解を得ることができた（[8]）．これは本研究課題における基本的な研究対象についての理解を得たことを意味する．この中には共形Gauss写像，Willmore曲面およびその上の正則4次微分の類似物についての理解も含まれる．従って，「研究の方法」の(1)については，本研究課題申請時の想定をはるかに超えた結果を得ることができた．(2)については，そもそも孤立臍点の指数についての研究が難しいことは十分にわかっていたのであり，その重要性に何の変更もない．また(3)については，(1)に関する議論が一段落してから取り組むのが良いと考えている（(1)についてはまだ論点を残していて，しばらく議論が続くと思われる）．またE^4内の極小曲面のGauss写像の正則性に関連する結果は本研究課題申請時には想定されていなかったが，とても良い結果であると思う．

以上で言及しなかった研究成果について以下に記していきたい．この段落は擬Euclid空間E^{n+2}_q内の零平均曲率ベクトルを持つ空間的曲面上の正則4次微分Qに関するものである．上のような曲面の(-1)-写像Ψ_{-1}というものを定義した．Ψ_{-1}はC^nへの正則写像である．そして$Q\equiv 0$とΨ_{-1}がある複素2次形式の零点集合に値をとることは同値であることを示した（[12]）．Ψ_{-1}がこの条件を満たしかつ恒等的に零でないときに，Ψ_{-1}から(-2)-写像Ψ_{-2}というC^{n-2}への正則写像を定義した．一般に，(-k)-写像Ψ_{-k}から(-k-1)-写像Ψ_{-k-1}を定義した．Ψ_{-k}写像はC^{n+2-2k}への正則写像である．MをRiemann面とし，FをMのE^{n+2}_qへの零平均曲率ベクトルを持つ空間的はめこみとする．Kを(n+1)/2を超えない整数の最大値とする．このときΨ_{-1}からΨ_{-K+1}のいずれかが恒等的に零であるまたはΨ_{-K}がある複素2次形式の零点集合に値をとることと，Fと空間のある等長変換との合成が(F_+, F_0, F_-)または$(F_+, F_0, F_-, 0)$と表されることは同値であることを示した（[12]），但しF_+，F_-はいずれもある次元の複素数空間への正則写像で，F_0は光的法ベクトルにM上の調和関数を掛けたものの組で与えられる．

この段落はE^3_1内の零平均曲率を持つ混合型曲面に関するものである．本研究は大阪市立大学の加藤信氏，橋本要氏，濱田航平氏との共同研究に基づく．E^3_1のコンパクト化はE^5_2の光錐の射影によって与えられ，$(S^2\times S^1)/\{\pm Id\}$と微分同型である．$E^3_1$のコンパクト化内の空間的曲面および時間的曲面を定義し，これらの共形Gauss写像を定義した（[15]）．そしてE^3_1のコンパクト化内の空間的または時間的曲面がWillmoreであることの定義を与えた（[15]）．またE^3_1内の混合型曲面で平均曲率が有界なものの空間的開集合，時間的開集合それぞれで定義される共形Gauss写像の値域をある共通の空間にうめこむことによって，混合型曲面全体で定義される(連続な)共形Gauss写像を定義した（[15]）．E^3内の完備かつ全曲率有限な極小曲面がE^3のコンパクト化であるS^3内のコンパクトかつC^∞級のWillmore曲面を定めるための条件は極小曲面のエンドがうめこまれていてかつ平坦であることによって与えられる．この類似をE^3_1内で考えようとするとき，E^3_1内の零平均曲率を持つ混合型曲面のエンドの平坦性が問題になり，それぞれのエンドの平坦性の判定がなされ平坦でない場合の性質が調べられた（[15]）．

最後にトーラス上の階数4の向きづけられたベクトル束に付随するツイスター空間に関する結果について説明したい．本研究は木原拓夢氏(令和2年度修士号取得)との共同研究に基づく．

計量および計量に適合する接続を持つ上記のようなベクトル束に付随するツイスター空間が偏水平な切断を持つならば，既に与えられている接続に関するある接続についてその切断は水平になることを示した（[16]）．この切断に対応するベクトル束の複素構造は後者の接続について平行である．計量がニュートラルな場合も調べ，偏水平な切断が空間的，時間的および光的な場合のそれぞれについて同様の結果を得た（[16]）．トーラスのホモロジー群の生成元を与える二つの閉曲線をとるとき，これらの上での水平性がツイスター空間のファイバーの有限個の元を与えるための条件が得られ，その条件はSO(3)の有限部分群を用いて表される（[16]）．

＜引用文献＞

[1] N.Ando, A two-dimensional Riemannian manifold with two one-dimensional distributions, Kyushu J. Math. **59** (2005) 285-299.
[2] N.Ando, A family of surfaces in E^3 given by an over-determined system, Current Developments in Differential Geometry ant its Related Fields, 57-75, 2016.
[3] N.Ando, Local characterizations of complex curves in $\mathbf{C}^2$ and sphere Schwarz maps, Intern. J. Math. **27** (2016), 1650067.
[4] N.Ando, Over-determined systems in relation to principal curvatures, J. Geom. **108** (2017) 355-373.
[5] N.Ando, Complex curves and isotropic minimal surfaces in hyperKähler 4-manifolds, Recent Topics in Differential Geometry and its Related Fields, 45-61, 2019.
[6] N.Ando, Surfaces in pseudo-Riemannian space forms with zero mean curvature vector, Kodai Math. J. **43** (2020) 193-219.
[7] N.Ando, Surfaces with zero mean curvature vector in neutral 4-manifolds, Diff. Geom. Appl. 72 (2020) 101647.
[8] N.Ando, Isotropicity of surfaces with zero mean curvature vector in 4-dimensional spaces, New Horizons in Differential Geometry and its Related Fields, 177-191, 2022.
[9] N.Ando, Isotropicity of surfaces in Lorentzian 4-manifolds with zero mean curvature vector, to appear in Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.
[10] N.Ando, Molding surfaces and Liouville's equation, preprint.
[11] N.Ando, Two generalizations of an over-determined system on a surface, preprint.
[12] N.Ando, Surfaces in flat pseudo-Riemannian space forms with zero mean curvature vector, preprint.
[13] N.Ando, The lifts of surfaces in neutral 4-manifolds into the 2-Grassmann bundles, preprint.
[14] N.Ando, T.Fujiyama and M.Umehara, C^1-umbilics with arbitrarily high indices, Pacific J. Math. **288** (2017) 1-26.
[15] N.Ando, K.Hamada, K.Hashimoto and S.Kato, Regularity of ends of zero mean curvature surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$, to appear in J. Math. Soc. Japan.
[16] N.Ando and T.Kihara, Horizontality in the twistor spaces associated with vector bundles of rank 4 on tori, J. Geom. **112** (2021) 19.
[17] R.Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces intothe 4-sphere, J. Differential Geom. **17** (1982) 455-473.
[18] R.Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geom. **20** (1984), 23-53.
[19] R.Bryant, S.S.Chern and P.A.Griffiths, Exterior differential systems, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol.1 (1980) 219-338, Science Press, Beijing, 1982.
[20] É.Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, 2nd ed., Hermann, 1971.
[21] T.Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Glob. Anal. Geom. **2** (1984) 257-287.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Naoya Ando	４．巻 -
２．論文標題 Complex Curves and Isotropic Minimal Surfaces in HyperKaehler 4-Manifolds	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Recent Topics in Differential Geometry and its Related Fields	６．最初と最後の頁 45-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naoya Ando	４．巻 43
２．論文標題 SURFACES IN PSEUDO-RIEMANNIAN SPACE FORMS WITH ZERO MEAN CURVATURE VECTOR	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Kodai Math. J.	６．最初と最後の頁 193-219
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naoya Ando	４．巻 72
２．論文標題 Surfaces with zero mean curvature vector in neutral 4-manifolds	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Differential Geometry and its Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2020.101647	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naoya Ando and Takumu Kihara	４．巻 112
２．論文標題 Horizontality in the twistor spaces associated with vector bundles of rank 4 on tori	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Geometry	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00022-021-00583-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Naoya Ando	4．巻 -
2．論文標題 ISOTROPICITY OF SURFACES WITH ZERO MEAN CURVATURE VECTOR IN 4-DIMENSIONAL SPACES	5．発行年 2022年
3．雑誌名 New Horizons in Differential Geometry and its Related Fields	6．最初と最後の頁 177～191
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/9789811248108_0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Naoya Ando	4．巻 -
2．論文標題 Isotropicity of surfaces in Lorentzian 4-manifolds with zero mean curvature vector	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12188-021-00254-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Naoya Ando, Kohei Hamada, Kaname Hashimoto and Shin Kato	4．巻 -
2．論文標題 Regularity of ends of zero mean curvature surfaces in \mathbf{R}^{2,1}	5．発行年 2022年
3．雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計15件（うち招待講演　9件／うち国際学会　5件）

1．発表者名 安藤直也
2．発表標題 階数4のベクトル束に付随するツイスター空間およびそれらの類似物の切断
3．学会等名 福岡大学微分幾何研究集会（招待講演）
4．発表年 2021年

１．発表者名
Naoya Ando

２．発表標題
The lifts of the conformal Gauss maps of minimal surfaces in the Euclidean 3-space

３．学会等名
Workshop on Surface Theory ---UY60---（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2022年

１．発表者名
安藤直也

２．発表標題
様々な4次元空間内の平均曲率ベクトルが零である曲面について

３．学会等名
九大幾何学セミナー（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Naoya Ando

２．発表標題
The lifts of surfaces in neutral 4-manifolds into their 2-Grassmann bundles

３．学会等名
The X International Meeting on Lorentzian Geometry, GeLoCor2021（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
安藤直也

２．発表標題
The lifts of surfaces in neutral 4-manifolds into their 2-Grassmann bundles

３．学会等名
大阪市立大学・幾何学講演会（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
安藤直也

２．発表標題
Isotropicity of surfaces in Lorentzian 4-manifolds with zero mean curvature vector

３．学会等名
大阪市立大学・幾何学講演会（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
Naoya Ando

２．発表標題
Surfaces with zero mean curvature vector in neutral 4-manifolds

３．学会等名
DGA2019（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
安藤直也

２．発表標題
４次元ニュートラル空間内の平均曲率ベクトルが零である曲面

３．学会等名
福岡大学微分幾何研究集会

４．発表年
2019年

１．発表者名
安藤直也

２．発表標題
共形Gauss写像

３．学会等名
大阪市立大学微分幾何学セミナー（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名 Naoya Ando
２．発表標題 Holomorphic quartic differentials on surfaces
３．学会等名 The International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 安藤直也
２．発表標題 時間的曲面の共形Gauss写像およびツイスター・リフト
３．学会等名 多様体上の変分問題とその周辺領域
４．発表年 2019年

１．発表者名 安藤直也
２．発表標題 様々な４次元空間内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面
３．学会等名 RIMS研究集会「部分多様体論の潮流」（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 安藤直也
２．発表標題 擬Riemann空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面
３．学会等名 2017年度福岡大学微分幾何研究集会
４．発表年 2017年

１．発表者名 Naoya Ando
２．発表標題 Minimal surfaces in Euclidean spaces, the Gauss maps and holomorphic quartic differentials
３．学会等名 Workshop on Accessory parameters at Kumamoto（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 安藤直也
２．発表標題 Euclid空間内の部分多様体の反転による像のコンパクト化について
３．学会等名 榎本一之教授退職直前ワークショップ（招待講演）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

research map 安藤直也 https://researchmap.jp/7000016851 ORCiD Naoya Ando https://orcid.org/0000-0001-8268-1513

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関