

令和 4 年 6 月 14 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05223

研究課題名（和文）対称対に付随したリー群の作用と部分多様体の幾何

研究課題名（英文）Geometry of Lie group actions and submanifolds associated to symmetric pairs

研究代表者

酒井 高司（Sakai, Takashi）

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：30381445

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題において、複素旗多様体の実形の交叉の構造を調べ、横断的であるときその交叉は対蹠的であることを示した。さらに、実形の交叉の対蹠性を応用することにより、Kähler-Einstein計量をもつ複素旗多様体において、ある弱い条件の下で二つの実形の組に対する $Z_2$ 係数Floerホモロジーを求めた。

対称空間の一般化として、一般化された $s$ 多様体の概念を導入した。対称対を用いて一般化された $s$ 多様体を構成する方法を与え、得られた一般化された $s$ 多様体の極大対蹠集合および対蹠数を調べた。特に、対称 $R$ 空間の拡張として、 $R$ 空間上に定まる自然な対称空間の構造およびその極大対蹠集合を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称対およびルート系の理論の一般化が、複素旗多様体内の実形の交叉の研究や、二重調和部分多様体の研究など幾何学の研究において有用であることがわかった。本研究課題において得られた結果および技術は今後の研究に大いに役立つものと期待される。

本研究課題において、対称空間の一般化概念として一般化された $s$ 多様体を導入した。これは非可換群やLie群などこれまででない対称性を持つ空間であり、今後更なる研究の進展が期待される。また、本研究課題において得られた $R$ 空間上の対称空間の構造は対称 $R$ 空間の自然な拡張であると言え、学術的に意義のあるものである。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we studied structures of the intersection of two real forms in a complex flag manifold. We showed that the intersection is an antipodal set of the complex flag manifold when two real forms intersect transversely. As an application of the antipodal structure of the intersection, we calculated the  $Z_2$ -Floer homology of a pair of real forms in a complex flag manifold equipped with a Kähler-Einstein metric.

We introduced the notion of generalized  $s$ -manifolds as a generalization of symmetric spaces. We gave a method of constructing generalized  $s$ -manifolds using  $-$ -symmetric pairs, and studied their maximal antipodal sets and antipodal numbers. As a generalization of symmetric  $R$ -spaces, we gave natural  $-$ -symmetric structures on  $R$ -spaces, and described their maximal antipodal sets explicitly.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 等質空間 対称対 対称三対 対蹠集合 旗多様体 Lagrange部分多様体 Floerホモロジー

## 1. 研究開始当初の背景

Riemann 対称空間の幾何学的研究は Lie 群の理論とともに発展した歴史をもつ。Riemann 対称空間  $M$  からは、Riemann 対称対  $(G, K)$  が定まり、 $M$  は等質空間  $G/K$  として表される。この対称対およびそのルート系は対称空間の分類において本質的な役割を果たす。さらに、対称対からは  $s$  表現 (線形イソトロピー表現)、イソトロピー作用、Hermann 作用など多様体への様々な Lie 群作用が誘導され、その軌道として対称  $R$  空間、Hermann 作用の軌道、複素旗多様体および実旗多様体など重要な等質 (部分) 多様体が得られる。近年では、これら対称対およびルート系の一般化に関する研究が進められ、幾何学への応用もなされるようになった。このような背景から、対称対に付随する Lie 群作用と部分多様体に関する本研究課題を計画した。

## 2. 研究の目的

連結 Lie 群  $G$  上の対合的自己同型による固定点集合として与えられる部分群を  $K$  とするとき、 $(G, K)$  は対称対と呼ばれ、特に  $K$  がコンパクトであるとき等質空間  $G/K$  は Riemann 対称空間となる。本研究課題では対称対  $(G, K)$  から誘導される Lie 群作用、およびその作用で不変な部分多様体の微分幾何学的な性質を明らかにすることを目的とした。本研究課題では主に次の 3 つの課題に取り組んだ。

### 1) 複素旗多様体内の実形の Lagrange 交叉と Floer ホモロジーの研究

連結コンパクト半単純 Lie 群  $G$  の随伴表現の軌道には Kirillov-Kostant-Souriau 形式と呼ばれる  $G$  不変なシンプレクティック形式とそれに適合した複素構造により Kähler 多様体の構造が入り、複素旗多様体と呼ばれる。複素旗多様体はコンパクト等質 Kähler 多様体の重要なクラスを与える。さらに、 $(G, K)$  を対称対とすると、 $K$  のイソトロピー表現の軌道は実旗多様体 (または  $R$  空間) と呼ばれ、複素旗多様体内に実形として埋め込まれる。すなわち、実旗多様体は複素旗多様体内において対合的反正則等長変換の固定点集合として得られ、全測地的 Lagrange 部分多様体になる。本研究課題では複素旗多様体内の二つの実形の交叉の構造を明らかにすることを目的とした。さらに、実形の交叉の対蹠性を利用し、二つの実形の組の Floer ホモロジーを求めることを目標とした。

### 2) Lie 群作用で同変な二重調和写像の研究

Riemann 多様体の間の写像でエネルギー汎関数の臨界点となるものは調和写像と呼ばれ、測地線や極小部分多様体の自然な拡張概念として、微分幾何学において中心的な研究対象となっている。Eells と Lemaire は調和写像の拡張として、二重調和写像の概念を導入した。二重調和写像は、張力テンソル場の二乗ノルムの積分量として定義される二重エネルギー汎関数の臨界点として定義され、その Euler-Lagrange 方程式は二重張力テンソル場が消えることとして特徴付けられる。定義から調和写像は二重調和であることが直ちに導かれる。逆に「Euclid 空間内の二重調和部分多様体は調和であるだろう」という主張は B.-Y. Chen 予想と呼ばれ、二重調和写像の研究において、主要な問題として研究が進められている。一方で、写像の像空間が非負曲率空間の場合、二重調和写像の理論は状況が大きく異なる。実際、球面などのコンパクト対称空間には調和でない二重調和部分多様体の例が知られている。本研究課題では Lie 群の作用により同変な二重調和写像について研究を行った。Hermann 作用をはじめコンパクト対称空間への等長的な Lie 群作用を用いて、コンパクト対称空間内の等質な二重調和部分多様体の構成およびそれらの幾何学的性質について研究を行った。

### 3) 対称空間の一般化と対蹠集合

対称空間の一般化について現在では様々な観点から研究が進められている。1981 年に Lutz は対称空間の拡張として、各点において有限アーベル群と同型になるような対称変換群をもつ多様体として対称空間を定義した。一方、1988 年に Chen-長野は、コンパクト対称空間において点対称によって互いに固定されるような点の集合として対蹠集合の概念を導入した。コンパクト対称空間の対蹠集合は有限集合となり、対蹠集合の元の個数の上限として 2-number と呼ばれる幾何学的不変量が定義される。本研究課題では対称空間およびその一般化について研究を行い、さらにこれらの一般化された対称空間の対蹠集合の構造を調べた。

## 3. 研究の方法

Lie 理論的なアプローチにより幾何学の研究を行う上で、ルート系は基本的で重要な手法となる。さらに、ルート系の分類は幾何学における様々な分類問題に対しても本質的である。対称対からは重複度をもつ制限ルート系が定まり、さらに近年では  $T$  ルートや対称三対などルート系

の拡張となる新しい理論も用いられるようになった。本研究課題ではこれらの種々のルート系理論を組み合わせた代数的な手法により、Lie 群作用で不変な部分多様体について微分幾何学的な性質を調べた。

#### 1) 複素旗多様体内の実形の Lagrange 交叉と Floer ホモロジーの研究

コンパクト型対称対の線形イソトローピー表現の軌道は実旗多様体と呼ばれ、複素旗多様体に実形として埋め込まれる。二つのコンパクト型対称対の組からは複素旗多様体の二つの実形の組が定まる。このとき、二つの実形の交叉の構造を調べるために、ルート系の一般化概念である対称三対の理論を用いた。これにより複素旗多様体の二つの実形の交叉が横断的になるための条件を与え、交叉の対蹠性を調べた。さらに、実形の交叉の対蹠性を利用して、複素旗多様体内の二つの実形に対する Floer ホモロジーを調べた。

#### 2) Lie 群作用で同変な二重調和写像の研究

張力テンソル場が法接続に関して平行となるような等長はめ込みが二重調和写像になるための必要十分条件を第二基本形式と曲率テンソルに関する条件式として与えることができる。一般に、Hermann 作用の軌道は張力テンソル場が平行であり、その第二基本形式は対称三対を用いて表すことができる。これにより、対称三対の型と重複度により Hermann 作用の軌道が二重調和になるための条件を与えることができる。対称三対は既約ルート系の拡張として公理的に定義された代数的な概念である。本研究課題では対称三対の理論を Hermann 作用の軌道の幾何を調べる目的に用いた。

#### 3) 対称空間の一般化と対蹠集合

本研究課題により、2019年4月から9月までアウグスブルク大学(ドイツ)に滞在し、Peter Quast 氏(アウグスブルク大学)と  $\mathbb{R}$  空間上の対称空間の構造について共同研究を行った。対称空間について、Goze と Remm は対称対の概念を導入し、対称対から等質な対称空間を構成する方法を与えた。我々は対称対を用いて、 $\mathbb{R}$  空間上に定まる対称空間の構造に関して研究を行った。特に、対称  $\mathbb{R}$  空間の一般化として、 $\mathbb{Z}_2$  の冪であるような対称空間の構造を調べた。

本研究課題では「秋葉原微分幾何セミナー」の開催を支援した。「秋葉原微分幾何セミナー」は主に東京近郊の微分幾何学を専門とする研究者および大学院生を対象とする合同セミナーである。また、2019年度まで研究集会「部分多様体論・湯沢」を開催した。2020年度は「部分多様体論オンライン 2020」として、Zoom によるオンライン研究集会を開催した。

### 4. 研究成果

#### 1) 複素旗多様体内の実形の Lagrange 交叉と Floer ホモロジーの研究

連結コンパクト Lie 群  $G$  の随伴軌道は  $G$  不変な Kähler 構造を持ち、複素旗多様体と呼ばれる。我々は、複素旗多様体に対して、あるトーラス作用を用いて対蹠集合の概念を定義した。一般に、複素旗多様体には  $k$  対称空間の構造が入る。我々が与えた複素旗多様体の対蹠集合の定義は  $k$  対称空間の点対称を用いて定めた対蹠集合と一致し、特に、コンパクト型 Hermite 対称空間の場合は Chen-長野によって与えられたコンパクト対称空間の対蹠集合の概念と一致する。複素旗多様体の極大対蹠集合はある Weyl 群の軌道として表され、したがってすべての極大対蹠集合は  $G$  の随伴作用により互いに合同になる。Riemann 対称対の線形イソトローピー表現の軌道は複素旗多様体に実形として埋め込まれ、実旗多様体と呼ばれる。我々は、複素旗多様体において、二つの実形を考え、それらの Lagrange 交叉を調べた。実形を定める二つの対合が可換な場合に、二つの実形が横断的に交わるための必要十分条件を対称三対を用いて与えた。また、二つの実形が横断的に交わる時、その交叉は対称三対の Weyl 群の軌道として与えられることを示した。これにより離散的な交叉は複素旗多様体の対蹠集合になることが分かる。さらに、実形の交叉の対蹠性を応用することにより、Kähler-Einstein 計量をもつ複素旗多様体において、必ずしも合同とは限らない二つの実形に対する  $\mathbb{Z}_2$  係数 Floer ホモロジーを求めた。これらの結果は井川治氏(京都工芸繊維大学)、入江博氏(茨城大学)、奥田隆幸氏(広島大学)、田崎博之氏(筑波大学)との共同研究による。

#### 2) Lie 群作用で同変な二重調和写像の研究

これまでの研究において、Riemann 多様体において平均曲率ベクトル場が平行である部分多様体について、二重調和になるための必要十分条件を与えた。特に、コンパクト対称空間への Hermann 作用の軌道は平均曲率ベクトル場が平行になる。我々は可換な Hermann 作用の軌道の第二基本形式を重複度付き対称三対を用いて記述することにより、これらの軌道が二重調和になるための必要十分条件を与えた。さらに、この判定法を用いて、コンパクト型対称空間への可換な Hermann 作用の軌道の二重調和性を調べた。また、可換な Hermann 作用に付随して定まるコンパクト Lie 群  $G$  への  $H \times K$  の両側からの作用についても、軌道の二重調和性を調べ、二重調和等質超曲面となる軌道の分類を与えた。これらの結果について大野晋司氏(日本大学)、浦川肇

氏（東北大学）との共著論文としてまとめ、Hiroshima Mathematical Journal に論文が掲載された。

### 3) 対称空間の一般化と対蹠集合

対称空間の定義を、有限アーベル群とは限らない一般の群の場合に拡張し、一般化された  $s$  多様体と名付けた。対称対を用いて一般化された  $s$  多様体を構成する方法を与え、これにより一般化された  $s$  多様体を具体的に構成した。特に、コンパクト対称三対から一般化された  $s$  多様体の例が数多く得られる。Chen-長野によるコンパクト対称空間の極地と対蹠集合の概念を一般化された  $s$  多様体に対して拡張し、対蹠集合の濃度の上限として定まる幾何学的不変量を対蹠数と名付けた。一般化された  $s$  多様体の各極地に対して一般化された  $s$  多様体の構造が誘導され、部分空間となることを示した。さらに、一般化された  $s$  多様体の対蹠数に関して、極地分解による不等式評価を得た。また、対称対を用いて構成した一般化された  $s$  多様体について、極大対蹠集合および対蹠数を調べた。本研究は大野晋司氏（日本大学）との共同研究による。

対称対を用いて、 $R$  空間上に定まる対称空間の構造を考え、ある種の自然な方法により、 $\mathbb{Z}_2$  の冪であるような対称空間の構造が定まるための必要十分条件を制限ルート系の条件として与えた。これにより、自然な方法により対称空間の構造が定まる既約  $R$  空間の分類を与えた。特に、 $\mathbb{Z}_2$  の場合は、我々が与えた自然な対称空間の構造をもつ  $R$  空間は対称  $R$  空間になる。ここで与えた  $R$  空間上の自然な対称空間の構造は、 $R$  空間を Euclid 空間に標準的に埋め込んだとき、外側の Euclid 空間の鏡映に延長される。この性質は、対称  $R$  空間を特徴付ける外的対称空間の拡張になる。さらに、 $R$  空間上に定まる自然な対称空間の構造に関する対蹠集合を調べ、極大対蹠集合が Weyl 群の軌道として与えられることを示した。これから、自然な対称空間の構造の極大対蹠集合の合同類は一意的であることを示し、さらに対蹠集合の元の個数の上限は  $R$  空間の  $\mathbb{Z}_2$  係数ホモロジーの次元と一致することを示した。これらの結果は、対称  $R$  空間の極大対蹠集合に関する田中-田崎の結果および 2-number に関する竹内の結果の拡張となる。本研究は Peter Quast 氏（アウグスブルク大学）との共同研究による。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Shinji Ohno and Takashi Sakai	4. 巻 13
2. 論文標題 Area-minimizing cones over minimal embeddings of R-spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 69-91
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.20566/13447777_13_69	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Peter Quast and Takashi Sakai	4. 巻 141
2. 論文標題 Natural $\mathbb{Z}_2$ -symmetric structures on R-spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 371-383
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.matpur.2020.02.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa	4. 巻 49
2. 論文標題 Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 47-115
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32917/hmj/1554516038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 酒井 高司	4. 巻 2210
2. 論文標題 対称空間の一般化と対蹠集合	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 42-56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Peter Quast and Takashi Sakai	4. 巻 777
2. 論文標題 A survey on natural $\alpha$ -symmetric structures on R-spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential Geometry and Global Analysis: In Honor of Tadashi Nagano, Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 185-197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/777	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 対称空間と対蹠集合の一般化について
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 Antipodal sets of generalized s-manifolds
3. 学会等名 対称空間の部分多様体とその時間発展 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Sakai
2. 発表標題 Toward classification of biharmonic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces
3. 学会等名 Workshop on the Isoparametric Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 Natural $\mathbb{R}$ -symmetric structures on R-spaces
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Sakai
2. 発表標題 Natural $\mathbb{R}$ -symmetric structures on R-spaces
3. 学会等名 The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems' (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Peter Quast and Takashi Sakai
2. 発表標題 Natural $\mathbb{R}$ -symmetric structures on R-spaces
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 複素旗多様体の実形の交叉とFloerホモロジーへの応用 合同とは限らない実形の場合
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大野晋司, 酒井高司, 寺内泰紀
2. 発表標題 一般化されたs多様体の対蹠集合
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shinji Ohno, Takashi Sakai, and Yasunori Terauchi
2. 発表標題 Antipodal sets of generalized s-manifolds
3. 学会等名 2018 Joint Meeting of the Korean Mathematical Society and the German Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 一般化されたs多様体の対蹠集合
3. 学会等名 幾何学と組合せ論2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinji Ohno, Takashi Sakai, and Yasunori Terauchi
2. 発表標題 Antipodal sets of generalized s-manifolds
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Takashi Sakai
2. 発表標題 The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold
3. 学会等名 2017 Korean Mathematical Society Spring Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井川治, 入江博, 奥田隆幸, 酒井高司, 田崎博之
2. 発表標題 複素旗多様体内の二つの実形のFloerホモロジー
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Sakai
2. 発表標題 The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold
3. 学会等名 Geometry of Submanifolds and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 対称空間の一般化と対蹠集合
3. 学会等名 部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 酒井高司
2. 発表標題 Natural $\mathbb{R}$ -symmetric structures on R-spaces and related topics
3. 学会等名 対称空間と群作用の幾何学
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 秋山梨佳, 酒井高司, 佐藤雄一郎
2. 発表標題 Riemann多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量に関する第一変分公式
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

酒井高司のページ <a href="https://www.comp.tmu.ac.jp/tsakai/">https://www.comp.tmu.ac.jp/tsakai/</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	浦川 肇  (Urakawa Hajime)  (50022679)	東北大学・グローバルラーニングセンター・名誉教授   (11301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	田崎 博之  (Tasaki Hiroyuki)  (30179684)	筑波大学・数理物質科学研究科(系)・准教授    (12102)	
連携研究者	入江 博  (Iriyeh Hiroshi)  (30385489)	茨城大学・理工学研究科(理学野)・准教授    (12101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 15th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop & The 3rd OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems"	開催年 2018年～2018年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------