様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　４月３０日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ０５２３０

研究課題名（和文）ゲージ理論による調和写像の研究

研究課題名（英文）The theory of Harmonic maps and Gauge theory

研究代表者
長友　康行（Nagatomo, Yasuyuki）
明治大学・理工学部・専任教授
研究者番号：１０２６６０７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）： 高橋の定理およびdo Carmo-Wallach理論の一般化により、終着調和写像という概念を得た。終着調和写像には剛性があり、それ以外の調和写像は必ず変形を持つことを示せる。
また、代数多様体から複素射影空間内の複素2次超曲面への正則等長写像のゲージ同値類によるモジュライ空間が複素部分多様体になること、像同値によるモジュライ空間は、1次ユニタリー群によるゲージ同値類によるモジュライ空間の商空間であることも示せた。
最後に本研究課題の有効性を示すために、定義域を複素射影空間や複素グラスマン多様体とし、終域を複素2次超曲面とする、正則等長写像の像同値性によるモジュライ空間の具体的記述に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
1980年代から1990年代に至るまで、リーマン面を定義域とする射影空間や対称空間への調和写像に関する結果が多く出版されたが、その後はこの理論を使って成果を出すことが徐々に困難になってきたようである。また、1970年前後に出版された2論文（高橋の定理、do Carmo-Wallach理論）を一般化しようとする研究も多く存在したと思われるが、決定打は存在しなかったと言えるであろう。この状況で調和写像の理論をベクトル束の幾何学と結合した上で、高橋の定理の一般化がなされ、その応用として定義域の次元にかかわらない調和写像の一般論を展開し、その応用例を豊富に与えた本研究には大きな意義があると信じている。

研究成果の概要（英文）： A generalization of theorem of Tsunero Takahashi and do Carmo-Wallach theory leads us to the concept of the terminal harmonic map into Grassmann manifolds. When the gauge condition is fixed, the terminal harmonic map is defined as the harmonic map satisfying the given gauge condition into Grassmannian of the lowest dimension. It has the rigidity and any harmonic map except the terminal one admits deformations.
The moduli space of holomorphic isometric immersion of algebraic manifolds into a complex quadric modulo gauge equivalence is a complex submanifold of a complex Euclidean space, which has a Kaehler structure with a circle action. Then the moduli space of those maps modulo image equivalence is the quotient of the moduli modulo gauge equivalence by the circle action.
Applying the theory, we obtain the explicit description of the moduli spaces of holomorphic isometric embeddings from the complex projective space and the complex Grassmannian of two-planes into complex quadrics.

研究分野： 微分幾何学

キーワード： ゲージ理論　ベクトル束　調和写像　正則写像　モジュライ空間　グラスマン多様体

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景
（１）研究代表者により、リーマン多様体から球面への調和写像に対する定理である「高橋の定理」が、グラスマン多様体への調和写像に対する定理として拡張されていた。
（２）「高橋の定理」を用いて、do Carmo と Wallach は球面から球面への極小はめ込みの分類に成功していたが（do Carmo-Wallach 理論）、この理論も研究代表者により、リーマン多様体からグラスマン多様体への調和写像の分類定理として拡張されていた。ただし、「高橋の定理」の一般化においても、do Carmo-Wallach 理論の拡張においても、ともにベクトル束とその接続の役割が重要であった。
（３）（１）（２）の具体的成果として、複素射影直線から複素射影空間内の複素 2 次超曲面への正則等長写像の像同値性によるモジュライ空間の記述が得られた。

２．研究の目的
本研究の目的は、リーマン多様体からグラスマン多様体への調和写像の幾何学とベクトル束の幾何学に代表されるゲージ理論との融合をめざし、調和写像のモジュライ空間を構築し、その性質を研究することにある。グラスマン多様体への写像は、すべてベクトル束とその切断のなす線形空間により導入されるので、ゲージ理論的観点は必須である。このとき、高橋の定理を座標関数の引き戻しに関する結果としてではなく、ベクトル束の切断に関する結果と見直すことにより、調和写像の特徴づけを得る。さらにここから、do Carmo-Wallach 理論の一般化も得られる。これら一般論により、調和写像のモジュライ空間を研究することが目的である。

３．研究の方法
「高橋の定理」や do Carmo-Wallach 理論では、接束、法束とリーマン接続以外のベクトル束やその上の接続は前面に現れておらず、これまでの微分幾何学における部分多様体論、調和写像論の域を出ていない。ところが研究代表者によるその一般化では、グラスマン多様体上で自然に出現する接束以外のベクトル束とその接続を利用する。写像の理論にベクトル束とその接続を用いることに、本研究の最大の特長があり、また困難さがある。そこで、具体例を中心に研究し、見出すべき理論を形成していかねばならない。
（１）このような状況であったので、多くの研究者との交流が不可欠であると考えた。とくに問題を以前から共同で追及してきた、連携研究者の高橋正郎氏や古賀勇氏との議論が非常に重要であった。
（２）　研究成果を発表し、さまざまな分野の研究者との議論の機会を増やすことも重要であった。特に海外の研究者に触発されたアイディアが本研究には多いことから、引き続き海外の研究者と直接的、間接的に議論していくことも重要であった。

４．研究成果
（１）複素射影空間内の複素超曲面の内、複素射影空間のキリングベクトル場の制限がまたその超曲面のキリングベクトル場になるような超曲面を求める問題を考察した。全測地的超曲面がこの性質を持つことは明らかであるが、それ以外にそのような超曲面が存在するのかどうかを決定することが問題となった。この問題も正則性を利用することにより、完全な分類を得ることに成功した。
（２）複素射影直線から複素二次超曲面への Einstein-Hermite 調和写像に関して、その分類を完成させた。この結果、写像の次数を固定すると Einstein-Hermite 調和写像のモジュライ空間と、同じ次数の正則等長写像のモジュライ空間が微分位相同型であることを示すことに成功した。この場合も研究代表者によるゲージ理論的考察に基づく写像のモジュライ空間の記述から、微分同相写像を構成できることが鍵となった。
（３）研究代表者の構築した一般化された do Carmo-Wallach 理論において、リーマン多様体からグラスマン多様体の Einstein-Hermite（EH)調和写像のモジュライ空間のコンパクト化を考察するときに現れる退化した調和写像に関する研究を行った。退化した EH 調和写像は本理論では像がグラスマン多様体の特別な全測地的部分多様体内の部分集合となる調和写像として出現することを示した。（この全測地的部分多様体はグラスマン多様体の普遍商束の切断の零点集合として特徴づけることができる。）その結果、最も退化した EH 調和写像という概念を取り出すことに成功し、この写像を terminal（EH）調和写像と名付けた。すると、terminal-EH 調和写像はゲージ同値性を除いて一意的であることを証明できた。また EH 調和写像が terminal で

ない場合には、必ず非自明な変形が存在することも示すことができた。
（４）一般化された do Carmo-Wallach 理論を用いて、ケーラー多様体から複素２次超曲面への正則写像に関する研究を行った。複素２次超曲面の普遍商束の引き戻し束としてケーラー多様体上の正則直線束が得られるが、その正則切断全体の集合 H にも複素構造が誘導される。このとき、複素２次超曲面を n 次元実ベクトル空間 W の n-2 次元部分空間のなす実グラスマン多様体とみなすと、W は H の実部分空間となる。このとき、W が H の複素部分空間であれば、EH 正則写像のゲージ同値類によるモジュライ空間はまた、複素構造を持つことを示せた。先行研究において、像同値類によるモジュライ空間が複素ベクトル空間の一次ユニタリー群による商空間として記述できるという結果が得られていたが、複素ベクトル空間が出現する理由と一次ユニタリー群による商空間として記述される理由をゲージ理論の立場から説明することに成功した。
（５）ケーラー構造を持つグラスマン多様体の内、複素２次超曲面に対して（４）で得た一般論を適用することにより、複素射影空間から複素２次超曲面への正則等長写像の分類に成功した。複素射影空間内の２次超曲面は実グラスマン多様体とみなせることから、上記理論の適用が可能となる。この分類は、以前に行った複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長写像の分類の一般化となっている。一般論を構築したことにより、複素射影直線の場合に行った個別の考察が不要となり、議論の大幅な簡約化を達成できた。これはより本質的な議論が展開できたことを意味している。また、偏微分方程式により定義された幾何学的対象の、代数的な議論による存在証明や、それらを具体的に構成する際にも、複素２次超曲面が実グラスマン多様体であることから、これまではリー群の実表現が議論に必要であると認識されていた。しかし、一般論により、複素表現を考察すれば十分であることが導かれるので、一般論が議論を大幅に見通しの良いものとすることに貢献したということが出来る。モジュライ空間を求める問題は、複素射影空間上の直線束が等質ベクトル束であることから、複素射影空間の正則等長変換群である特殊ユニタリー群の表現論の問題に帰着される。しかし、すでに定義域が複素射影直線の時に議論を完成していた（Tohoku Math. J.(2) 69,2017)ので、この結果と Young 図形を用いて、結果に到達することができた。
（６）グラスマン多様体への調和写像に関する「高橋の定理の一般化」を基礎とした調和写像の変形を記述する「do Carmo-Wallach 理論の一般化」を適用することにより、複素ベクトル空間内の２次元部分空間のなす複素グラスマン多様体から複素射影空間内の２次超曲面への正則等長写像に関するモジュライ空間を求めることに成功した。この場合は、たとえ議論が特殊ユニタリー群の表現論の問題に帰着され、必要とされるテンソル積表現の既約分解までは可能であっても、「do Carmo-Wallach 理論の一般化」から要求される対称積表現の既約分解を得るためには異なる代数的議論が必要となる。ここで、引き続き代数的議論を遂行することも可能であろうが、幾何学的には見通しがよいとは言えないので、再度幾何学的観点から議論を見直すことにした。すると、複素グラスマン多様体上の複素直線束が問題となっているので、複素グラスマン多様体の正則等長変換群の固定部分群の中心と言われる部分群の作用が本質的であることが理解できた。この議論を進めていくことにより、結果に到達することに成功した。なお、この新たな議論は（５）の場合にも適用可能であり、さらなる一般化が期待される。
本研究により、ベクトル束の微分幾何学がグラスマン多様体への写像の微分幾何学には欠かせないものであることが、豊富な結果により示されたと思われる。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Yasuyuki Nagatomo	4．巻 216-31
2．論文標題 Holomorphic Isometric Embeddings of the Projective space into Quadrics	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Geometriae Dedicata	6．最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-022-00689-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Yusuyuki Nagatomo	4．巻 60
2．論文標題 Holomorphic maps into Grassmann manifolds (Harmonic maps into Grassmann manifolds III)	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6．最初と最後の頁 33-63
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-021-09765-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Yasuyuki Nagatomo, Masaro Takahashi	4．巻 56
2．論文標題 Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 675-711
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Oscar Macia, Yusuyuki Nagatomo	4．巻 53
2．論文標題 Moduli of Einstein-Hermitian harmonic mappings of the projective line into quadrics	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6．最初と最後の頁 503-520
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-017-9585-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　8件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 古賀勇（発表者）、長友康行	
2．発表標題 複素射影直線から複素グラスマン多様体への同変の分類	
3．学会等名 日本数学会　幾何学分科会　一般講演	
4．発表年 2022年	

1．発表者名 Yasuyuki NAGATOMO	
2．発表標題 Symmetric Kaehler immersions into the Complex Grassmannian	
3．学会等名 The 13th MSJ-SI 2021 Differential geometry and Integrable Systems （International conference)（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2022年	

1．発表者名 Yasuyuki NAGATOMO	
2．発表標題 Harmonic mappings into Grassmannians	
3．学会等名 18th OCAMI-RIRCM Joint DG workshop on ``Differential geometry of Submanifolds　in Symmetric spaces and related problems''（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2020年	

1．発表者名 Yasuyuki NAGATOMO	
2．発表標題 Harmonic Mappings into Grassmannians	
3．学会等名 The second Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2019年	

１．発表者名 古賀勇、長友康行
２．発表標題 複素射影直線から複素グラスマン多様体への同変調和写像の構成と分類
３．学会等名 日本数学会　幾何学分科会　一般講演
４．発表年 2019年

１．発表者名 長友康行
２．発表標題 複素射影直線から複素2次超曲面への調和写像
３．学会等名 福岡大学微分幾何研究集会2018（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 長友康行
２．発表標題 複素射影直線から複素2次超曲面への調和写像
３．学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 長友康行
２．発表標題 複素射影直線から階数2のグラスマン多様体への調和写像
３．学会等名 部分多様体論・湯沢2017（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Yasuyuki NAGATOMO
２．発表標題 Harmonic maps of the complex projective line to complex hyperquadrics
３．学会等名 The 21st Internationalworkshop on Hermitian symmetric spaces & Submanifolds（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 長友康行
２．発表標題 Holomorphic isometric embeddings maps into Grassmannians of rank 2
３．学会等名 東京大学複素解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	古賀　勇 (Koga Isami)		
連携研究者	高橋　正郎 (Takahashi Masaro) (70311107)	久留米工業高等専門学校・一般科目理科系・准教授 (57101)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
Spain	Department of Geometry and Topology	Faculty of Mathematical Sciences	University of Valencia	