様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　５ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2023
課題番号：１７Ｋ０５２３１

研究課題名（和文）ラグランジュ平均曲率流とシンプレクティック幾何

研究課題名（英文）Lagrangian mean curvature flow and symplectic geometry

研究代表者
今野　宏（Konno, Hiroshi）

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：２０２５４１３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：シンプレクティック多様体とよばれる高い次元の空間の多くの性質は，ラグランジュ部分多様体とよばれる部分集合の性質によって記述される。本研究課題では，ラグランジュ部分多様体の計量的な側面の研究をした。ラグランジュ平均曲率流とは，ラグランジュ部分多様体の体積を最も効率よく小さくするようなラグランジュ部分多様体の変形族である。本研究課題の成果のひとつは，ラグランジュ平均曲率流の例をシンプレクティック多様体へのアーベルリー群の作用に関するモーメント写像を用いて組織的に構成したことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題で構成したラグランジュ平均曲率流の具体例の構成方法は，既存のさまざまな方法を統合して統一的な視点からの理解を与えるだけでなく，既存の結果をより一般化したものである。また，我々の構成した例は，ラグランジュ平均曲率流の特異点の局所モデルである自己相似解や平行移動解を含むだけでなく，特異点を生じた後にトポロジーが変化するような大域的な例も含んでいる。これらは，ラグランジュ平均曲率流の特異点の挙動を理解するための指針を与えると考えられる。

研究成果の概要（英文）：Symplectic manifolds are spaces of higher dimension. Many of their properties are discribed in terms of their subsets called Lagrangian submanifolds. In this research project we studied metric aspects of Lagrangian submanifolds. A Lagrangian mean curvature flow is a one parameter family of Lagrangian submanifolds whose volume are decreasing in a most effective way. One of our results is to construct examples of Lagrangian mean curvature flows via moment maps for actions of abelian Lie groups on symplectic manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：ラグランジュ部分多様体　平均曲率流

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) ラグランジュ平均曲率流

1982 年に Harvey-Lawson により，特殊ラグランジュ部分多様体の概念が導入され，カラビ・ヤウ多様体内の極小部分多様体の組織的研究が始まった．カラビ・ヤウ多様体のコンパクトラグランジュ部分多様体に対して，体積を最も効率よく減少させる方向に変形するときラグランジュ部分多様体という性質は保たれる。このラグランジュ部分多様体の変形族はラグランジュ平均曲率流と呼ばれる。一般には, ラグランジュ平均曲率流は有限時間内に特異点を生じてしまう。

一方,「よい状況」では，ラグランジュ平均曲率流は特殊ラグランジュ部分多様体に収束することが期待される。2002 年に Thomas-Yau はラグランジュ部分多様体の安定性という概念を導入し，安定性とラグランジュ平均曲率流の解の存在，収束性の関係について，ある予想を提案した。また，その後の研究で，この予想は修正が必要であることがわかり，2014 年に Joyce により, Thomas-Yau 予想の再定式化が与えられた。Joyce の定式化は深谷圏の考え方を含むもので, その予想の解決にはまだ遠いことを予感させるものであった。以後，ラグランジュ部分多様体の安定性の研究はなかなか進展がなく，安定性という概念も厳密な定式化が可能であるかどうかはわからなかった。

(2) ラグランジュ部分多様体とミラー対称性

シンプレクティック多様体の重要な性質の多くは，そのラグランジュ部分多様体の性質として記述され，ミラー対称性との関りで，ラグランジュ部分多様体のなす深谷圏の研究がめざましい進歩をとげている。ミラー対称性において，1996 年に Strominger-Yau-Zaslow により，予想（以下 SYZ 予想）が提唱された。すなわち，カラビ・ヤウ多様体に特殊ラグランジュトーラスファイブレーションがある場合，その双対トーラスファイブレーションとしてミラー多様体が構成される，というものである。
その後, Kontsevich-Soibelman, Gross-Siebert, Fukaya, Auroux をはじめとする多くの人々の努力により，SYZ 構成によるミラー多様体の構成は，特異ファイバーをもつ場合にも拡張された。さらに，この構成法により，カラビ・ヤウ多様体の範囲を超えて，より一般のシンプレクティック多様体 M のミラーとしての複素多様体 W が構成された。このとき M のラグランジュ部分多様体で，そのミラーが W 上の正則直線束となるものが具体的に定められる。

(3) 幾何学的量子化

幾何学的量子化は，シンプレクティック多様体にベクトル空間を対応させる枠組みである。シンプレクティック多様体上の計量を保つ接続をもつ複素直線束で，曲率のあるスカラー倍がシンプレクティック形式となっているものを前量子直線束とよぶ。このとき，偏極をひとつ固定すると，前量子直線束の切断全体の空間の偏極から定まる部分ベクトル空間が定まる。偏極の最も典型的な例は，シンプレクティック構造と整合的な複素構造で，これをケーラー偏極という。ケーラー偏極をひとつ固定すると，前量子直線束は正則直線束となる。シンプレクティック多様体にその正則切断からなるベクトル空間を対応させる。その他の偏極の例は，ラグランジュトーラスファイブレーションから定まる実偏極である。前量子直線束のファイバーへの制限のホロノミーにより，底空間に格子点が定まるが，実偏極から定まるベクトル空間の次元は，その格子点の個数に等しい。物理的な考察からの指導原理は「偏極に応じてベクトル空間が定まるが，その次元は偏極の取り方によらない」というものである。2011 年に Baier-Florentino-Murao-Nunes はシンプレクティックトーリック多様体において，トーリック多様体としての構造から定まる実偏極に収束するケーラー偏極の族で，対応する前量子直線束の正則切断の族が，格子点のファイバーに台をもつデルタ関数的な切断に収束するものを構成した。これにより，実偏極から定まる格子点が，ケーラー偏極のある極限における正則切断の空間の基底に対応することが，より一般のシンプレクティック多様体に対しても成立することが予想される。2014 年に研究代表者は Hamilton との共同研究で，旗多様体に対してこの予想が成り立つことを示した。

２．研究の目的

(1) ラグランジュ平均曲率流の特異点

ラグランジュ平均曲率流の特異点を研究は，変微分方程式論の立場から行うのと並行して，特異点の幾何学的性質を調べることも重要である。ラグランジュ平均曲率流の特異点の局所モデ

ルと考えられる自己相似解や平行移動解が Anciaux, Lee-Wang, Joyce らによって与えられた。さらに，Yamamoto はトーリック多様体内のラグランジュ平均曲率流とよく似た偏微分方程式に対する解の具体的構成を与えた。この例においては，特異点の生成だけでなく，特異点生成後にラグランジュ部分多様体のトポロジーが変化する様子も記述される。より一般的で強力な具体例の構成法を見出し，特異点の性質を見出すことが目的である。

(2) ラグランジュ部分多様体の安定性

カラビ・ヤウ多様体 M に特殊ラグランジュトーラスファイブレーションがある場合，その双対トーラスファイブレーションとして M のミラーである複素多様体 W が構成される。この SYZ 予想は，特異ファイバーがない場合には，微分幾何的なレベルでミラー対称性が確かめられる。このとき， M のあるラグランジュ部分多様体 L のミラーとして，ミラー多様体 W 上の正則直線束 V が定まる。さらに L が特殊ラグランジュ部分多様体であるとき，V には変形エルミートアインシュタイン接続が定まる。一方，コンパクトケーラー多様体上の正則直線束に変形エルミートアインシュタイン接続が存在するための必要十分条件として，正則直線束に対するある安定性が予想されていた。（この予想は 2021 年に解決された。）一般に，SYZ 対応において，特異ファイバーがある場合には上記の V と L の対応は微妙な点を含むが，この正則直線束に対する安定性のミラーがラグランジュ部分多様体の安定性と関係することが期待される。

(3) 幾何学的量子化

ラグランジュトーラスファイブレーションは SYZ 構成の出発点となるだけでなく，実偏極を与える。実偏極が定める底空間の格子点は前量子直線束の正則切断の空間の基底と対応していることが期待される。射影空間のミラーの SYZ 構成にはさまざまなラグランジュトーラスファイブレーションが現れるが，これらの相互の関係を幾何学的量子化の立場からどのように説明されるかを考察したい。

３．研究の方法

(1) ラグランジュ平均曲率流の解の具体例の構成

Yamamoto は，Anciaux，Lee-Wang，Joyce らの自己相似解の方法を考察して，背後にモーメント写像があることを見抜いて，トーリック多様体内のラグランジュ平均曲率流と似た偏微分方程式の解の具体的構成を与えた。この考察を深化させて，より一般の状況でラグランジュ平均曲率流の解の具体的構成を与えることが課題となる。

(2) ラグランジュ部分多様体の安定性とそのミラー

2020 年に，Lotay-Oliveira は U(1)作用をもつ 4 次元ハイパーケーラー多様体内の U(1)不変なラグランジュ部分多様体から出発するラグランジュ平均曲率流が特殊ラグランジュ部分多様体に収束するための必要十分条件を同変安定性として与えた。この結果は，安定性の概念の有効性を大いに支持するものであったが，一方で安定性の概念の定式化の難しさも示唆する状況証拠も含んでいた。そこで，U(1)作用を持つ 4 次元 ALE ハイパーケーラー多様体において、ラグランジュ部分多様体の同変安定性と、そのミラーと期待される変形エルミートアインシュタイン続に関する安定性についての関係を探ることを試みた。

(3) 幾何学的量子化

Auroux は射影空間の反標準因子の補集合上の特殊ラグランジュトーラスファイブレーションから出発して射影空間のミラーを構成したが，2014 年に Pascaleff はこのミラーをシンプレクティック多様体とみなしたときに，そのラグランジュ部分多様体を多数構成して，それらの間のフレアーホモロジーの積構造を決定することにより，このミラーとして射影空間上の正則直線束の正則切断の空間の通常とは異なる「よい基底」を発見した。この基底と射影空間のミラーを構成したときの特殊ラグランジュトーラスファイブレーションによる実偏極との関係を幾何学的量子化により説明することをひとつの目標とする。また，射影空間はさまざまな重み付き射影空間に複素多様体として退化することが知られている。重み付き射影空間のトーリック多様体としての構造は，射影空間の実偏極を定める。このように射影空間はさまざまな実偏極をもつ。射影空間のさまざまな実偏極の相互関係や実偏極全体の様子を理解し，射影空間のミラー対称性との関係を調べることが目標となる。

４．研究成果

(1) ラグランジュ平均曲率流の解の具体例の構成

カラビ・ヤウ多様体へのアーベルリー群のハミルトン作用で，その軌道と直交する特殊ラグランジュ部分多様体があるとき，モーメント写像を用いてラグランジュ平均曲率流の解の具体例を構成した。この方法を適用して，既知の自己相似解だけでなく，U(1)作用を持つ 4 次元非コンパクトハイパーケーラー多様体内のラグランジュ平均曲率流で，特異点の生成や特異点生成後にトポロジーが変化する様子を詳細に記述できる。この方法は Yamamoto によるトーリック多様体におけるラグランジュ平均曲率流に似た偏微分方程式の解の構成方法を，トーリック多様体でない空間に対しても適用できるように一般化したものである。また，Joyce による特殊ラグランジュ部分多様体の構成方法をラグランジュ平均曲率流に対して拡張したもの，と考えることもできる。これにより，I 型の特異点生成についてもさまざまな種類があることが観察できる。

さらに，我々が考察したラグランジュ部分多様体は，SYZ 構成において現れるラグランジュ部分多様体と同一のものではないが，構成方法に多くの類似点がある。我々の得たラグランジュ平均曲率流の構成方法の拡張を模索したが，これについては，良い定式化は得られなかった。

(2) ラグランジュ部分多様体の安定性

4 次元 ALE ハイパーケーラー多様体のミラーは，ある特定のハイパーケーラー構造をもつものについては SYZ 構成により与えられている。残念ながら，この構成法は，我々の考察するべき 4 次元 ALE ハイパーケーラー多様体に対しては適用できないことがわかった。そのため，既存の SYZ 構成を拡張することが必要であり，現在その拡張を検討しているが，まだ完成していない。

(3) 幾何学的量子化

射影空間はさまざまな重み付き射影空間に複素多様体として退化するが，シンプレクティック構造を固定したとき，射影空間のケーラー偏極の族で，重み付き射影空間が定める射影空間の実偏極に収束し，その極限において実偏極の定める格子点と正則切断の空間の基底が対応する，というものが存在することが予想される。研究代表者と Hamilton の方法を用いると，この予想を証明できると考えられる。さらに，射影空間のトーリック多様体としての構造から定まる実偏極や重み付き射影空間の定める射影空間の実偏極をつなぐ実偏極が存在し，射影空間のミラーを構成するときに用いた実偏極はこのようなものであると考えられる。このように，さまざまな実偏極の相互関係とミラー対称性の関りが少しずつ見え始めた。2021 年に Collins-Jacob-Lin により射影空間（より正確には delPezzo 曲面）のなめらかな反標準因子の補集合に特殊ラグランジュトーラスファイブレーションが構成され，2023 年に Lin-Takahashi により，このファイブレーションの計量のあるハイパーケーラー構造の極限における挙動が研究された。このハイパーケーラー構造の極限と対応する正則切断の空間の基底との関係を研究しているが，まだ完成していない。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Hiroshi Konno	４．巻 198
２．論文標題 Lagrangian mean curvature flows and moment maps	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Geometriae Dedicata	６．最初と最後の頁 103-130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-018-0331-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 今野 宏
２．発表標題 polygon spaceの幾何学的量子化について
３．学会等名 研究会「Geometric Quantization and Related Topics」（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 今野宏
２．発表標題 ラグランジュ平均曲率流とモーメント写像
３．学会等名 2019名城研究集会「多様体上の種々の幾何構造の融合」（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroshi Konno
２．発表標題 Lagrangian mean curvature flows and moment maps
３．学会等名 The 4th China-Japan Geometry Conference（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 今野宏
２．発表標題 Lagrangian Mean Curvature Flows and Moment maps
３．学会等名 東京大学複素解析幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

今野 宏 - 研究者 - researchmap https://researchmap.jp/read0123595/ 今野宏｜明治大学 https://www.meiji.ac.jp/sst/grad/teacher/05/02/6t5h7p00000etqhi.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関