

令和 4 年 5 月 13 日現在

機関番号：34103

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05232

研究課題名（和文）幾何と微分方程式に対するKlein-Cartanプログラム

研究課題名（英文）Klein-Cartan program for geometry and differential equations

研究代表者

森本 徹 (Morimoto, Tohru)

四日市大学・関孝和数学研究所・研究員

研究者番号：80025460

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：外在的幾何と線形微分方程式について Boris Doubrovと待田芳徳との共同研究により統一的一般理論を確立し、論文を数学雑誌Sigmaに発表した。その応用として $sl(3)$ 型の外在的幾何と微分方程式について詳しい研究を行い、その中の推移的な幾何構造を完全に分類した。内在的幾何についてJaehyun Hongとの共同研究により、それまでの研究を改良総合し、統一的一般理論を確立し、プレプリントをアーカイブに載せた。特に、フィルター付き多様体上の広義のG構造に対してその不変量の基本系を求める一般的なアルゴリズムを与えた。現在複素幾何やサブリーマン幾何へのその理論の応用を進めている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何には外在的幾何と内在的幾何の区別がある。

先に述べた、外在的幾何における統一理論と内在的幾何における統一理論は、その双方が互いに連携し、古典微分幾何の基本原則を与えるものであり、幾何における深い理解と広い応用をもたらすものである。

研究成果の概要（英文）：We, joint with Boris Doubrov and Yoshinori Machida, have established a unified general theory of extrinsic geometry and linear differential equations on a basis of nilpotent geometry and nilpotent analysis, and published a paper entitled: Extrinsic geometry and linear differential equations, in Sigma. As an application of the general theory, we then have carried out detailed studies on extrinsic geometry and linear differential equations of  $sl(3)$  type and have classified all the transitive geometric structures. We joint with Jaehyun Hong, have established a unified general theory of intrinsic geometry by integrating and improving the previous works, and put a preprint: Prolongations, invariants, and fundamental identities, in ArXiv math. In particular we have given a general algorithm to find a fundamental system of invariant of an arbitrary G-structure (in an extended sense) on a filtered manifold. We are then applying the above theory to complex geometry and subRiemannian geometry.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何構造の同値問題 外在的幾何 内在的幾何 包含的な微分方程式系 不変量

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1・研究開始当初の背景

様々な幾何構造と様々な微分方程式の不変量を求めることは古くからの微分幾何の基本問題である。巾零幾何と巾零解析の方法を基礎にして lie、Klein、Cartan のアイデアに従い幾何構造と微分方程式を群論的に捉え、それらの不変量を統一的に求めようとするプログラムが研究代表者らにより提唱されて来た。そしてこれまで色々な方向から研究が進められ準備されてきた。

### 2・研究の目的

本研究の目的は、巾零幾何と巾零解析の方法を基礎にして幾何構造と微分方程式に対して Klein-Cartan プログラムを遂行することである。

### 3・研究の方法

幾何には外在的幾何と内在的幾何の区別があり、それぞれに置いて長い研究の歴史がある。微分方程式においても更に長い歴史と膨大な研究の蓄積がある。線形微分方程式は外在的幾何と、非線形微分方程式は内在的幾何と密接に関係する。更に外在的幾何と内在的幾何もまた緊密に関係し合う。これまでの研究を踏まえ、幾何構造と微分方程式を統一的な研究を展開する。特に外在的幾何と線形微分方程式については Boris Doubrov と待田芳徳との共同研究を中心として理論を進め、内外の研究者と交流を持ち理論の応用を図る。

内在的幾何については Jaehyun Hong との共同研究を中心として理論を進め、また内外の色々な研究者との研究交流を持ちその理論の応用を図る。

### 4・研究成果

先に述べたように幾何には外在的幾何と、内在的幾何の区別があり、またこれらは線形及び非線形微分方程式と密接に関係している。本研究では巾零解析を基礎として Lie, Klein, Cartan の流れを引き、幾何構造と微分方程式の系統的且つ有機的な研究を展開した。特に次の成果を得た。

(1) Boris Doubrov (Belarus State University), 待田芳徳 (静岡大) との共同研究により、外在的幾何と線形微分方程式系の研究を進め、それらの微分不変量を求める一般的方法を明らかにした。特に旗多様体の部分多様体と包含的な線形微分方程式系との圏同型を示し、これらの不変量を求めるアルゴリズムを与えた。これらの結果を共著論文 *Extrinsic geometry and linear differential equations* として纏め上げ、数学の専門誌 SIGMA に発表した。引き続き共同研究を進め、上記論文で展開した一般理論の応用として、 $sl(3)$  接触型の外在的幾何と微分方程式について詳しい研究を進め、その中で推移的なものの分類を完全に遣りとげた。これを *Extrinsic geometry of  $sl(3)$  type* という題目でプレプリントに纏め上げ、現在それを更に発展させている。

(2) 一方 Jaehyun Hong との共同研究によって内在的幾何の同値問題について研究を進めた。幾何構造の同値問題は幾何における基本問題の一つであるが、従来の理論を包摂する極めて統一的な理論を完成した。

特にフィルター付き多様体上の拡大された意味の、任意の  $G$ -構造に対してその普遍量の基本系を求めるための一般的なアルゴリズムを構成した。従来幾何構造の不変量を求めるのに、カルタン接続を構成し、その曲率によって不変量を求めるのが有力な方法とされてきたが、上記の方法はカルタン接続が構成できない時にも有効であり、幾何構造の今後の研究に大いに役立つことと思われる。この理論を共著論文 *Prolongation invariants, and fundamental identities of geometric structures* として纏め arXiv in mathematics に載せた。現在数学の専門誌に投稿中である。更にこの理論の複素幾何やサブリーマン幾何を始め様々な具体的幾何への応用を図っている。

上記の成果は、これまで部分的にいろんなところで発表、講演してきたが、特に、2021年には北見工大及び北大で講演をした。また2022年6月には GRIEG international Zoom Seminarで連続講義をする予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Bors Doubrov, Yoshinori Machida, and Tohru Morimoto	4. 巻 17
2. 論文標題 Extrinsic geometry and linear differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 K.Furutani, M Godoy-Molina, .I. Markina, T. Morimoto, A. Vail'ev	4. 巻 28
2. 論文標題 Lie algebras attached to Clifford modules and simple graded Lie algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Lie Theory	6. 最初と最後の頁 843 - 864
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 18件/うち国際学会 6件）

1. 発表者名 森本徹
2. 発表標題 古典微分幾何学の原理
3. 学会等名 北海道大学幾何学コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森本徹
2. 発表標題 外在的幾何と線形微分方程式系－背足豊君を偲んで－
3. 学会等名 北見工業大学数学教室コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tohru Morimoto
2. 発表標題 Does a formal equivalence imply an analytic equivalence for geometric structures?
3. 学会等名 International Workshop in Zoom "Grauert Theory and Recent Complex Geometry", Osaka City Univ., Feb.6-9, 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森本徹
2. 発表標題 Infinite dimensional extrinsic geometries
3. 学会等名 May 29, 2019, Workshop on Cartan Geometry, May 29 - 31, 2019, KIAS, Seoul. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森本徹
2. 発表標題 外在的幾何とそれに関係するいろいろな問題及びM-0 双対性
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森本徹
2. 発表標題 外在的幾何と微分方程式
3. 学会等名 大阪市立大学数学研究所 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 クリフォード代数に付随したリー代数と単純有階リー代数
3. 学会等名 研究集会「微分幾何学・微分式系・特異点論の応用」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tohru Morimoto
2. 発表標題 Extrinsic geometries and differential equations
3. 学会等名 Korean Institute of Advanced Studies (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 Structures of geometries and differential equations
3. 学会等名 実代数幾何・特異点研究集会(塩田昌弘先生追悼研究集会)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tohru Morimoto
2. 発表標題 Extrinsic geometries and differential equations
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)幾何構造と微分方程式-対称性と特異点の視点から-(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 古典微分幾何の原理, 2019年3月7日
3. 学会等名 第26回 沼津改め静岡研究会－幾何, 数理物理, そして量子論－ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 sl(3)型の外在的幾何と微分方程式
3. 学会等名 「微分方程式と幾何学」研究集会、立命館大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 ダビデの星と遊ぶsl(3)型の外在的幾何と微分方程式
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会、九州工業大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 sl(3)型の外在的幾何と微分方程式
3. 学会等名 北海道大学幾何コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tohru Morimoto
2. 発表標題 Extrinsic geometries and differential equations of type $sl(3)$
3. 学会等名 International Conference on Symmetry and Geometric Structures, Stefan Banach International Mathematical Center, Warsaw (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 旗多様体での外在的幾何と線形微分方程式系
3. 学会等名 立命館大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森本 徹
2. 発表標題 曲率とは何だろうか、どう定義し、どう計算するか
3. 学会等名 立命館大学数理科学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tohru Morimoto
2. 発表標題 Extrinsic geometries and involute linear differential equations
3. 学会等名 International Workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems", Osaka City University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年



〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------