

令和 4 年 5 月 28 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05233

研究課題名(和文) ファノ多様体の極限の複素解析的手法による研究

研究課題名(英文) Complex analysis and limits of Fano manifolds

研究代表者

佐野 友二 (Sano, Yuji)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：00399792

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：標準ケーラー計量の存在問題に関して次の3つの結果を得た。(1) トーリック・ファノ多様体のモーメント多面体の重心に対して、その極双対に対応する不変量の消滅がケーラー・アインシュタイン計量の存在のための必要条件になることを一般的な形で証明した。また、十分条件にはならない反例も発見した。(2) 第2チャーン指標が正になるようなトーリック・ファノ多様体の分類を8次元以下の多様体に対して行った。(3) Kempf-Ness 定理の一般化として非自明な固定化部分群を持つ相対安定な点をモーメント写像の零点として特徴づけた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トーリック・ファノ多様体をはじめ、ケーラー・アインシュタイン計量の存在問題に対して様々な条件が知られているが、具体的な多様体に対してそれらの条件を適用することは簡単ではない。本研究の結果により、少ない計算量でトーリック・ファノ多様体がケーラー・アインシュタイン計量を持つかどうかを判定することができるようになった。第2チャーン指標が正であるようなトーリック・ファノ多様体の分類問題は4次元までは分類が知られていたが、今回は8次元まで調べることができた。これは現在、現在知られているトーリック・ファノ多様体のデータベース(9次元まで)の多くの部分を分類したことになる。

研究成果の概要(英文)：I achieved the following three results related to canonical Kahler metrics.

(1) I proved that the vanishing of the polar dual to the momentum of the associated momentum polytope implies the existence of Kahler-Einstein metrics on manifolds without any assumption. Moreover, I found the counter-examples to the converse. (2) Up to eight dimension, we classified toric Fano manifolds with positive second Chern character by using computer. (3) I characterized relatively stable point under some group action as a zero of the associated moment map, which is a generalization of Kempf-Ness theorem.

研究分野：ケーラー幾何学

キーワード：ケーラー・アインシュタイン計量 K-安定性 トーリック・ファノ多様体 第2チャーン指標 相対安定性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在問題について、特に、計量が存在するための十分条件については1980年代のG. Tianのアルファ不変量やNadelの乗数イデアル層の非存在性などが知られており、2012年にはChen-Donaldson-Sun, G. Tianにより、K-安定性と計量の存在が同値であることが示されていた。特に、K-安定性との同値性については、Gromov-Hausdorff収束理論を複素幾何学に適用し、Hormanderの $L^2$ 手法と組み合わせて、Gromov-Hausdorff極限を代数多様体として捉えることに成功していた。またBerman-Boucksom-Jonssonにより、Gromov-Hausdorff収束理論の代わりに変分法を用いてケーラー・アインシュタイン計量とK-安定性の同値性が証明されていた。

### 2. 研究の目的

ファノ多様体がケーラー・アインシュタイン計量を持つこととK-安定性とよばれる幾何学的不変式論の意味での多様体の安定性条件が同値であることが示されていた(Yau-Tian-Donaldson予想の解決)。しかし、与えられた多様体がK-安定であるかの検証は、計量の存在問題と同様に難度の高い問題として残っていた。特に、K-安定性は、多様体そのものではなく多様体を退化させた極限の情報(Donaldson-二木不変量)により定義されているという点から外在的な条件と言える。本研究では、ファノ多様体上にケーラー・アインシュタイン計量が存在するための条件を、与えられた多様体の内在的な条件(例えば、計量の存在への障害となる乗数イデアル層の特徴づけ)で記述することを目的とした。その上でK-安定性の検証可能な判定方法を提示し、その方法に基づき、具体例を見つけることとした。この目的はChen-Donaldson-Sun, TianによるYau-Tian-Donaldson予想の解決の証明の中で使われていた $L^2$ -手法とNadelの乗数イデアル層の構成の類似点に着目したものである。具体的には、ケーラー・アインシュタイン計量を持たないファノ多様体において、計量の存在への障害となる乗数イデアル層に対応する部分概形の特徴づけを行い、それを用いてK安定性を崩すようなテスト配位を構成できると考えていた。

### 3. 研究の方法

(1)本研究開始以前に、低次元のトーリック・ファノ多様体について、ケーラー・アインシュタイン計量が存在しないときに、ケーラー・リッチ流から得られる乗数イデアル層のサポートや指数を具体的に計算する結果を得ていた。この結果を元に、トーリック多様体で十分な知見を得てから一般のファノ多様体へ拡張することを考えていた。しかし、乗数イデアル層の研究はNadelの研究以降、ケーラー・リッチ流との関係を調べた結果(Phong-Sesum-Sturmなど)が知られていたが、大きな進展が見られていなかった。本研究の主な目的は、ケーラー・アインシュタイン計量と乗数イデアル層の関係について新たな知見を見出すことを目的としていた。乗数イデアル層の研究の進捗が遅れてきた場合、乗数イデアル層に拘らず、他の視点からケーラー・アインシュタイン計量の存在への障害となるような内在的な条件を探すことも想定した。その場合、本研究開始以前から行っていたトーリック・ファノ多様体の重心の研究を軸に考察をすることとした。

(2)本研究を行う上で、専門家との意見交換は必要不可欠であることから、所属機関において定期的なセミナー・研究集会を行うこととした。研究集会はコロナ禍の影響で2020年に中止したが、それ以外の年では毎年開催し、国内の研究者を招聘し、意見交換を行った。

### 4. 研究成果

研究開始後、トーリック・ファノ多様体においてケーラー・リッチ流から得られる乗数イデアル概形のサポートと指数について、低次元の計算を行った。当初、得られるサポートは余次元1であることを証明できたと思われたが、その後、4次元トーリック・ファノ多様体においてケーラー・リッチ流による乗数イデアル概形のサポートの余次元が1より高い例が見つかった。ケーラー・リッチ流による乗数イデアル概形は余次元1であるだろうという予測から、Ross-Thomasのブローアップによるテスト配位の構成法を用いて、K-安定性を崩すようなテスト配位を構成できると考えていたが、想定と異なる状況になった。その後もしばらく、乗数イデアル層をもとにしたテスト配位の構成を検討したが、進展が得られなかった。そこで、事前に考慮していた通り、乗数イデアル層に拘ることなく、トーリック・ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在への新たな障害を模索することに方針を修正し、次の結果を得た。

(1)トーリック・ファノ多様体のモーメント多面体の重心とその極双対の対応の発見：トーリ

ック・ファノ多様体には常にケーラー・リッチソリトンが存在することが知られていた (Wang-Zhu). ケーラー・リッチ流から得られる乗数イデアル層は本質的にはそのリッチソリトンに付随するベクトル場によって決まる. しかし, ベクトル場を具体的に求めることは多様体の対称性が低い場合には難しい. また, 同様の問題は Calabi の端的ケーラー計量の場合にも考えられ, ファノ多様体には複数の標準的なベクトル場が存在することとなる. そこで, ベクトル場を探すことから一旦離れ, トーリック・ファノ多様体の扇の多面体 (モーメント多面体の極双対多面体) 上に標準的な不変量 (ベクトル) を探すことにした. Wang-Zhu により, トーリック・ファノ多様体の場合, ケーラー・アインシュタイン計量の存在とモーメント多面体の重心が原点であることが同値であることが示されていた. そこで, 多面体の Minkowski 問題の拡張として, モーメント多面体の重心と極双対となるような不変量を新たに導入し, モーメント多面体の重心との対応を考察した. ここまでは本研究の前にもすでに行っていたが, 部分的な考察に留まっており, さらにその証明にもギャップがあることが本研究遂行中に分かった. 本研究において, 証明のギャップを埋めて, 制限的な仮定を課すことなく証明することができた. 当初は新たな不変量の定義だけから証明できると考えていたが, 実際には重心が原点であるときのモーメント多面体の構造を用いることが必要であることが分かった. この点が本研究期間中で得た新たな知見である. 重心が原点にあるような反射的多面体の構造は B.Nill により知られていたが, 本研究ではさらに詳細に調べた. これにより, 「モーメント多面体の重心が原点であれば, 新たな不変量が消滅する」ことを示すことができた (査読論文として出版済). さらに, 逆の方向が成り立たない反例が 6 次元以上に存在することも計算ソフトウェア Polymake を用いて探した. この不変量はケーラー・アインシュタイン計量の存在の同値条件にはなっていないが, 計算機で計算する上でモーメント多面体の重心の計算より計算量が非常に少ないことが特徴である. ケーラーアインシュタイン計量の障害として松島の定理 (正則ベクトル場のなす Lie 代数の簡約性) があるが, 新たな不変量の消滅は松島の障害より強い条件を示した (研究集会にて発表済) また, 新たな不変量と K 安定性の関係についても考察した. Berman-Berndtsson により, Wang-Zhu の結果を用いずに, モーメント多面体の重心が原点ならば, 対応するトーリック・ファノ多様体が K-安定であることが示されていた. その証明の中では, 多面体の境界に標準測度を入れたとき, Donaldson-二木不変量に対応する不変量の正定値を示すことが証明の主題になっていた. つまり, トーリック・ファノ多面体が K-安定かどうかは, モーメント多面体の境界上の測度の問題とも言える. このことは多面体の Minkowski 問題にも同様のことが言える. この類似点をより明確にすることでトーリック・ファノ多様体におけるケーラーアインシュタイン計量の存在のための新たな必要十分条件を見つけることは新たな課題と言える.

(2) 第 2 チャーン指標が正であるようなトーリック・ファノ多様体の分類問題の部分的解決: 宮岡-Yau 不等式のように, ケーラー・アインシュタイン計量を持つような多様体には第 2 チャーン類と第 1 チャーン類に関する不等式が成り立つ. そこでケーラー・アインシュタイン計量 (または K 安定性) は第 2 チャーン類に対して制限を与えることが分かる. そのような視点を動機の一つとして, 第 2 チャーン指標を持つようなトーリック・ファノ多様体の分類について取り組んだ. もともとこの問題はファノ多様体の分類問題の延長にあり, 佐藤氏・須山氏らにより研究が進められていた. 上記のケーラー・アインシュタイン計量を持つようなトーリック・ファノ多様体のモーメント多面体の構造で得た知見をもとに佐藤氏・須山氏の研究に参加した. 本研究期間内では完全には解決できなかったが, ピカール数が 4 の曲面と第 2 チャーン指標の交点数を計算するプログラムを Polymake で実装し, Obro のトーリック・ファノ多様体の分類 (および Paffenholz のデータベース) を用いて, 8 次元以下のトーリック・ファノ多様体において第 2 チャーン指標を持つトーリック・ファノ多様体は射影空間だけであることを示した (査読付き論文として出版済). この結果は一般次元でも成り立つであろうことが予想され, その解決が今後の課題である.

(3) 固定化部分群が非自明な相対安定な点のモーメント写像の零点としての特徴付け: Donaldson による定スカラー曲率計量を持つ偏極多様体と漸近的 Chow 安定性の関係は, 満洲氏, Seyyedali, 橋本氏などにより, 端的ケーラー計量の場合に拡張されていた. Carl Tipler と共同で, 端的ケーラー計量が Calabi フローの自己相似解であることに注目して, balanced 計量においても対応する標準計量 (sigma-balanced 計量) を導入し, Donaldson の結果を拡張した (査読付き論文として出版済). 特に, balanced 計量とモーメント写像の描像をそのまま拡張したことがこの結果の特徴である. さらに本研究期間中に, sigma-balanced 計量に対応する Kempf-Ness 定理の拡張を考察した. 固定化部分群が非自明な場合の Kempf-Ness 定理は Kirwan や Szekelyhidi によりすでに拡張されていた. それらは, 固定化部分群に対する相対安定な点をモーメント写像の零点としてではなく, モーメント写像のノルム (の 2 乗) の臨界点として特徴づけるものであった. そこで, 池平氏と共同で, 群作用を変えることで, 固定化部分群を持つような相対安定な点をモーメント写像の零点として特徴づけた (研究集会にて発表済).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Sano Yuji, Tipler Carl	4. 巻 -
2. 論文標題 A Moment Map Picture of Relative Balanced Metrics on Extremal Kahler Manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-020-00510-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sano Yuji, Sato Hiroshi, Suyama Yusuke	4. 巻 34
2. 論文標題 Toric Fano manifolds of dimension at most eight with positive second Chern characters	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kumamoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Sano Yuji	4. 巻 8
2. 論文標題 A polar dual to the momentum of toric Fano manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Complex Manifolds	6. 最初と最後の頁 230 ~ 246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/coma-2020-0116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件/うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A polar dual to the momentum of toric Fano manifolds
3. 学会等名 3rd Symposium in Geometry and Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A moment map model for relative balanced metrics
3. 学会等名 Trends in Modern Geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐野友二
2. 発表標題 トーリックファノ多様体の正則自己同型群の簡約性の十分条件について
3. 学会等名 ファノ多様体及び関連する代数幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 On a combinatorial aspect of toric KE manifolds
3. 学会等名 4th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A combinatorial structure of toric Kahler-Einstein manifolds
3. 学会等名 Stability in Kahler Geometry and related topics (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A Polar Dual to the Momentum of toric Fano manifolds
3. 学会等名 The Workshop on Global Aspects of Projective and Kahler Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A moment map picture of relative balanced metrics on extremal manifolds
3. 学会等名 Trends in Modern Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A polar dual of barycenter of toric Fano manifolds
3. 学会等名 One day workshop on Kahler Geometry
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野友二
2. 発表標題 端的ケーラー計量と相対 balanced 計量について
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuji Sano
2. 発表標題 A moment map for relative balanced metrics
3. 学会等名 第3回日中幾何学研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野友二
2. 発表標題 トーリック多様体上の二木不変量について
3. 学会等名 複素微分幾何学と geometric flow
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 佐野友二, 他	4. 発行年 2017年
2. 出版社 株式会社サイエンス社	5. 総ページ数 100
3. 書名 数理科学2017年6月号	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

フランス	Universite de Bretagne Occidentale			
------	------------------------------------	--	--	--