

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05236

研究課題名（和文）特殊な手術による幾何構造を持つ多様体の大域的本質の追求

研究課題名（英文）pursuing global essences of manifolds with geometric structures via special surgeries

研究代表者

足立 二郎 (Adachi, Jiro)

北海道大学・理学研究院・研究院研究員

研究者番号：20374184

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：多様体上の接分布構造という幾何構造は、局所的にはジェット空間と呼ばれる古典的に微分方程式を扱うような空間の正準構造であったりします。しかし、大域的に考えるとその存在は多様体の位相に密接に関係します。また、一つの多様体上の同じタイプの構造であっても剛的なものや柔軟なものがあったりします。本研究では、Goursat構造と呼ばれる構造を持つ多様体に関してトーラス手術という手法を開発し、構造の柔軟性を調べました。また、その他の接分布構造に関して、存在するための必要十分条件や、分類の考察をしました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体上の接分布構造とは、多様体と呼ばれる図形の各点に接空間の部分空間を対応させる幾何構造です。その中でも接触構造と呼ばれるものは、古典力学や光学にも関連し古くから研究されてきました。そのみならず、現代の物理学とも密接に関連しています。本研究の成果は接触構造に類似またはその一般化にあたる構造に対し、接触構造の研究と類似の手法の適用の可能性を示すものです。また逆に別の視点からの研究を接触構造の研究にフィードバックする可能性も示します。この研究成果が新たな研究分野の存在を他の研究者に知らしめた一面もあります。

研究成果の概要（英文）：A geometric structure called a tangent distribution on a manifold is sometimes locally equivalent to the canonical structure on the jet space, that is classically used to deal with differential equations. However, considering it globally, its existence is closely related to the topology of the manifold. In addition, even structures of the same type on a single manifold might be rigid or flexible. In this research project, I developed the torus surgery for manifolds with the Goursat structures and investigated the flexibility of the structures by the method. Furthermore, for some other tangent distributions, I studied the necessary and sufficient condition for a manifold to admit them and the classification of them.

研究分野：微分トポロジー

キーワード：接分布構造 Goursat構造 トーラス手術 ホモトピー原理

1. 研究開始当初の背景

本研究課題の申請のころも現在でも、接触・シンプレクティックトポロジーは活発に研究され発展を続ける分野です。当時の中心的な話題の一つは、高次元多様体上の接触構造に関する過旋と呼ばれる1径数ホモトピー原理の成り立つクラスに関するものでした。Borman, Eliashberg, Murphyによる高次元多様体上の接触構造の存在定理と過旋性に関する論文[BEM]が2016年に出版され、高次元の接触構造の研究における大きな転換点の時期でした。その結果に基づき、過旋性の様々な視点からの特徴づけが議論されていました。

私自身は[BEM]の考察とは独立に、接触ラウンド手術の方法を開発し、それによる考察を進めていました。この方法による[BEM]の理解と特徴づけを考えたいということが、本研究の動機の一つです。そして接触構造にとどまらず、より一般化された構造に対して同様なアイデアを拡張したいということも自然な動機です。

2. 研究の目的

接触構造などの多様体上の接分布構造の研究は、様々な数学が交錯する所です。本研究の興味は特に多様体の微分トポロジーにあります。3次元接触幾何は多様体と接分布構造の幾何とトポロジーが見事に融合した分野です。本研究ではさらに大きな視点から、高次元や高階までの接触構造やその一般化を統一的にとらえられる理論を創り出すことを大きな目的としています。

そのための具体的な研究の目的として、次の概念の高次元や高階を含めて一般化することを考えます。一つは、1径数ホモトピー原理の成り立つ構造のクラスである「過旋型構造」です。そして、研究対象とする幾何構造そのものではなく、その幾何的な本質を捕えるような「開本型構造」です。多様体とその上の構造をも含めて行う「特殊な手術」を、キーとなるアプローチ法として研究を進めたいと考えています。これらの手術の本質を捉えることも、本研究の目的の一つです。高次元や高階の接触構造に共通する本質を捉え、上記の大きな目標につなげることを目的とします。

3. 研究の方法

上記の目的のために、特殊な手術を構成することを考えます。高次元の接触構造に関する手術として高次元の接触円形手術は、本研究の開始時にすでに開発できていました。そのために、高次元の接触構造に関しては、この手術を使って考察を進めました。[BEM]で示された高次元の過旋型構造の特徴づけと、この特殊な手術の関連を考察しました。高階の接触構造に関しては、トーラス手術という高階接触手術という方法を開発することから考えました。そして、それを使って、過旋型構造や開本型構造の考察を進めました。

また、その他の接触構造以外の構造に関しては、過旋型構造の他の方法からも考察することも重要です。その構造が存在するための多様体が満たすべき必要十分条件の考察も、ホモトピー原理の視点から行いました。ホモトピー原理の考察は、ホロのミック近似や凸積分の理論の方法を用いて行いました。

4. 研究成果

まず、本研究と関連する結果で本研究の開始以前にきっかけがあったものの精密化を行いました。

独自に開発した接触円形手術と、これまでによく知られていた3次元接触構造の過旋性との関連の考察です。3次元多様体上の接触構造を過旋なものに改変する操作としてLutzねじりというものがよく知られています。この操作は接触円形手術の組み合わせとして表せることを示しました([A1])。このことから、類似のことが高次元でも期待できます。高次元の接触円形手術はすでに開発済みです。この接触円形手術の同様な組み合わせで[BEM]での高次元過旋構造が得られることが示せています。

高次元多様体上の接触構造の過旋性の定義と特徴づけが[BEM]で与えられたわけですが、その記述は複雑で、分かりやすい幾何学的な特徴づけが議論されていました。「球面が芯のプラスチックトウフエで自明な回転を持つもの」が特徴づけるという先行研究に対し、芯がトーラスなものでも特徴づけられることを示しました([A2]の改定版)。同時期に任意のプラスチックトウフエの存在が過旋性の十分条件であるという結果が発表されましたが、[A2]の結果は必要性も示しています。

Goursat構造(高階の接触構造)を持つ多様体のGoursatトーラス手術を構成しました。Goursat構造を持つトーラスバンドと、そのGoursat多様体への接着を構成して、Goursatトーラス手術を定義しました。そして、これは3次元の場合には接触円形手術と同じであることを示しました。本研究の期間中に、2階のGoursat構造であるEngel構造と呼ばれる構造の研究に世界的な転換点が訪れました。アメリカ合衆国のサンノゼにある(当時)アメリカ数学研究所(AIM)に周辺分野の研究者が集められ、Engel構造の研究の立ち上げ集会が開かれました。私も招待

されて参加しました。その勢いで2種類の Engel 構造の柔軟性の候補が提案されましたが、私の方法ではその両方を扱えそうです。新型コロナウイルス感染症の蔓延への対応で、中断を余儀なくされましたが、公開のための論文を準備中です。

また多様体上のその他の接分布構造へも、考察はひろまっています。n次元多様体上の各点にm次元の部分接空間を対応させる接分布構造で、次元がnになるものを考えます。そのようなもののうち、“最も積分不可能”なものを対象にしました。そのような構造が存在するための多様体の必要十分条件を得ました ([A3])。またそのようなクラスの中でのホモトピーによる分類を得ました ([A3])。ここで扱っている構造の一つに、(3,5)分布があります。さらに、(2,3,5)Cartan 分布についても考察は進んでいます。また、Engel 構造よりも高階の Goursat 構造についても考察は深まっています。

これらの研究は国内外に大きなインパクトを与えています。コロナ期にふらっと参加したオンラインの国際集会で、上の接触ラウンド手術の結果を使った講演を聞くことができました。Cartan 分布の研究では国内で共同研究のきっかけを作りつつあります。Goursat 構造の研究は国際共同研究として進めており、さらに海外からの共同研究のオファーが来たりしています。

〈参考文献〉

[BEM] M. Borman, Ya. Eliashberg, E. Murphy, “Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions”, *Acta Math.* 215 (2015), no. 2, 281-361.

[A1] J. Adachi, “Contact round surgery and Lutz twists”, *Internat. J. Math.* 30 (2019), no. 4, 1950019, 31 pp.

[A2] J. Adachi, “Plastikstufe with toric core”, arXiv:1609.00837

[A3] J. Adachi, “Existence and classification of maximally non-integrable distributions of derived length one” arXiv:2111.01403

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Adachi Jiro	4. 巻 30
2. 論文標題 Contact round surgery and Lutz twists	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1950019 ~ 1950019
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X19500198	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Jiro Adachi
2. 発表標題 Existence of certain distributions -- from the view point of the h-principle --
3. 学会等名 奈良幾何表現論セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 接分布構造とホモトピー原理について
3. 学会等名 日本数学会北海道支部講演会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Jiro Adachi
2. 発表標題 On global existence of some geometric structures
3. 学会等名 Workshop on Algebraic and Analytic Singularities（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 (3,5)分布からCartan(2,3,5)分布へ,存在と分類
3. 学会等名 Singularities of Differentiable Maps and its Applications (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Jiro Adachi
2. 発表標題 Existence and Classification of certain non-integrable distributions
3. 学会等名 Global Analysis and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 長さ1の完全非ホロノミック接分布の存在について
3. 学会等名 特異点論の未来
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 最も積分不可能な(m,n)型奇数次元分布の存在と分類について
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Jiro Adachi
2. 発表標題 Goursat surgery and Engel structure
3. 学会等名 NCTS Symplectic Expedition: Following Yasha (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 接触ラウンド手術の一般化とその柔軟性の議論への応用について
3. 学会等名 北海道大学 幾何学コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 Goursat 多重ラウンド手術と Engel 構造
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 Goursat 多重ラウンド手術と柔軟性
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 接触構造とラウンド手術
3. 学会等名 阪大 4 次元トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 Goursat 手術の新術式
3. 学会等名 微分幾何学・微分式系・特異点論の応用
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jiro Adachi
2. 発表標題 Goursat handles and surgeries
3. 学会等名 Foliations and Groups of Diffeomorphisms 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 Engel 構造の柔軟性について
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 Goursat ハンドルと手術について
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 接触構造とその特性葉層について
3. 学会等名 微分幾何学と特異点論の応用
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jiro ADACHI
2. 発表標題 Flexibility and round surgery of contact structures
3. 学会等名 Geometric and Algebraic Singularity Theory (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 足立 二郎
2. 発表標題 接触構造とその特性葉層について
3. 学会等名 葉層構造と微分同相群2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jiro ADACHI
2. 発表標題 Contact structures and round surgeries
3. 学会等名 Singularity theory and its applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>プレプリント： (1) Jiro Adachi, "Plastikstufe with toric core", arXiv 1609.00837. (2) Jiro Adachi, "Existence and classification of maximally non-integrable distributions of derived length one" arXiv:1609.00837.</p>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Geometric and Algebraic Singularity Theory	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 奈良幾何表現論セミナー	開催年 2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ポーランド	University of Warsaw		
米国	Texas A&E University		
ドイツ	Ludwig Maximilians University Munich		

共同研究相手国	相手方研究機関			
United States	University of Texas	Massachusetts Institute of Technology	University of Georgia	
Israel	Technion			