

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05242

研究課題名(和文) カンドルを用いた曲面結び目不変量の幾何的意味の解明とその応用

研究課題名(英文) Elucidation of the geometric meaning of surface knot invariants defined by quandles and its application

研究代表者

田中 心 (TANAKA, Kokoro)

東京学芸大学・教育学部・准教授

研究者番号：70448950

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：曲面結び目をカンドル代数を用いて研究し、主に以下の結果を得た。(1) バイカンドル彩色とカンドル彩色の図式的な関係を明らかにし、彩色数を含む種々の不変量が等価であることを示した。(2) 曲面結び目の橋指数を彩色数で下から評価する式を証明した。また、具体例に対して橋指数を決定した。(3) カンドルホモロジー理論にシフト鎖写像を定義し、コサイクル不変量をシャドウコサイクル不変量の関係を明らかにした。また、シフト鎖写像の誘導準同型を調べた。(4) ツイストスパン結び目と呼ばれる球面結び目の結び目カンドルを調べ、結び目群は同じだが結び目カンドルは異なる球面結び目の例を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

古典的結び目は「ひもの結び方」を数学的に捉えた研究対象であり、曲面結び目は古典的結び目が「時間発展したもの」とみなすことができる。この曲面結び目という研究対象をカンドルと呼ばれる代数系を用いて調べることは重要である。今回得られた結果(1)と(3)は、カンドルの代数的な性質解明に新しい研究手段を与えるものである。また、今回得られた結果(2)と(4)は、曲面結び目の性質解明に新しい研究手段を与えるものである。なお、結果(4)は曲面結び目の結び目カンドルの代数的な性質に着目しており、今後の新たな研究への糸口となり得るものである。

研究成果の概要(英文)：Surface knots were studied using quandle algebras and the following main results were obtained. (1) We explored a diagrammatic relation between biquandle colorings and quandle colorings, and showed that various invariants including coloring numbers are equivalent. (2) We gave a lower bound for the bridge indices of surface knots by using kei coloring numbers, and determined the explicit values for some specific examples. (3) We introduced the shifting chain map on quandle homology theory and explored a relation between quandle cocycle invariants and shadow cocycle invariants. We also observed the induced homomorphism. (4) We studied the knot quandles of knotted spheres, called twist-spun knots, and gave an example of knotted spheres with the same knot group but different knot quandles.

研究分野：幾何学

キーワード：低次元トポロジー 曲面結び目 カンドル 結び目

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

曲面結び目とは、四次元ユークリッド空間内に埋め込まれた閉曲面のことであり、埋め込まれた閉曲面が球面のときは球面結び目ともいう。曲面結び目は古典的結び目(三次元ユークリッド空間内に埋め込まれた円周)を一般化した研究対象といえる。曲面結び目を三次元ユークリッド空間に射影した像に"高さの情報"を与えたものを(その曲面結び目の)図式という。研究代表者は曲面結び目を図式的な手法で研究してきた。

またカンドルとは、1982年にD. JoyceとS. Matveevによって定義された代数系であり、結び目(古典的結び目と曲面結び目)の図式と相性が良い。特に結び目から定まる結び目カンドルは、古典的結び目に対してほぼ完全不変量になっている。研究代表者は曲面結び目をカンドルを用いて研究してきた。例えば、結び目カンドルが曲面結び目に対しては完全不変量にはなっていないことを明らかにしていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、カンドルを用いて定義される曲面結び目不変量の幾何学的意味を解明することであった。具体的には、以下の四つが主な目的である。

#### (1) バイカンドル彩色とカンドル彩色の関係

バイカンドルとは、カンドルを拡張した代数系である。カンドルが演算を一つ持つのに対し、バイカンドルは演算を二つ持つ。定義より、カンドルは自然にバイカンドルと見なせる。バイカンドルを用いた彩色不変量とカンドルを用いた彩色不変量の間には代数的な関係があることが知られていたが、その幾何学的意味は分かっていたが、それを解明することが目的の一つであった。

#### (2) 橋トライセクション表示について

曲面結び目の橋トライセクション表示とは、曲面結び目を三つのパーツ(自明な円板族)に分けて表示する方法であり、2017年にJ. MeierとA. Zupanによって導入された。この表示から"橋指数"と呼ばれる最小値型の曲面結び目不変量が定義されるが、下から評価する方法は知られていなかったため、それを解明することが目的の一つであった。

#### (3) カンドルホモロジー群の代数的な性質

カンドルにはホモロジー理論が定義されており、それを用いて彩色数を精密化することができる。その精密化には(通常の)コサイクル不変量とシャドウコサイクル不変量があるが、両者の関係が知られておらず、それを解明することが目的の一つであった。

#### (4) 球面結び目の結び目カンドルについて

古典的結び目の結び目カンドルはよく研究されていた。例えばD. JoyceとS. Matveevによって、向きを無視すれば完全不変量であることが分かっていた。またM. Eisermannによって、結び目カンドルの代数的な性質も研究されていた。一方で、曲面結び目の結び目カンドルはあまりよく分かっていない状況であったため、それを解明することも目的の一つであった。

### 3. 研究の方法

前項で述べた四つについて、その研究の方法を述べる。

#### (1) バイカンドル彩色とカンドル彩色の関係

バイカンドルから自然にカンドルが定義できるが、そのカンドルの図式的意味を明らかにすることがポイントであった。実際には、図式の"二重化"のバイカンドル彩色が、もとの図式のカンドル彩色に対応していた。ただ、それだけでは彩色不変量の対応を完全に解明したことはない。

#### (2) 橋トライセクション表示について

曲面結び目の表示には曲面ブレイドの閉包によるものもあり、その表示から"ブレイド指数"と呼ばれる最小値型の曲面結び目不変量が定義される。研究代表者は以前にカンドル彩色数を用いて、ブレイド指数を下から評価することに成功していた。この手法を橋指数の場合にも適用できないか考えた。ただ、橋トライセクション表示とカンドル彩色の相性は未知の状況であっ

たため、そこから研究をスタートした。

### (3) カンドルホモロジー群の代数的な性質

カンドルホモロジーの定義に出てくる境界作用素は二つの項からなる。研究代表者の指導学生であった橋本氏は、二つの項のうち一方が鎖写像になっていることを発見した。この鎖写像の双対を用いると  $n$ -コサイクルから  $(n+1)$ -コサイクルを得ることができるため、シフト鎖写像と名付けた。このシフト鎖写像を用いて、二種類のコサイクル不変量（通常版とシャドウ版）の関係を探ることにした。

### (4) 球面結び目の結び目カンドルについて

近年 A. Inoue によってファイバー球面結び目の結び目カンドルの構造が明らかにされた。この結果に注目し、ファイバー球面結び目の典型例であるツイストスパン結び目の結び目カンドルを調べることにした。より具体的には、結び目群は同型だが結び目カンドルは非同型であるような球面結び目の存在問題に取り組むことにした。

## 4. 研究成果

以上を踏まえ、本研究課題の成果を述べる。

### (1) バイカンドル彩色とカンドル彩色の関係

これは京都大学の石川勝巳氏との共同研究である。前項で、図式の"二重化"のバイカンドル彩色がもとの図式のカンドル彩色に対応していると述べたが、この対応をより詳しく調べた。その結果、「二重化して引き離す操作」と「図式の一部を押し出す操作」が互いに逆操作の関係になっていることを明らかにした。この関係を代数的にきっちり書き下すことで、彩色数だけではなくコサイクル不変量やホモトピー不変量の間関係も解明することができた。得られた成果を国内外の研究集会で講演し、プレプリントとしてまとめ、学術誌へ投稿した。残念ながら期間内の出版は叶わなかった。

### (2) 橋トライセクション表示について

これは名城大学の佐藤光樹氏との共同研究である。橋トライセクション表示の別の見方である triplane 図式に着目し、(対称的な)カンドル彩色を triplane 図式で解釈することができた。また、当初の目的であった橋指数の下からの評価式も得られ、具体的な曲面結び目に対しその橋指数を決定することができた。これにより、任意の自然数に対し、その数を橋指数として持つような曲面結び目が存在することも分かった。得られた成果を国内外の研究集会で講演し、プレプリントとしてまとめ、学術誌から出版することができた。

### (3) カンドルホモロジー群の代数的な性質

これは指導学生であった橋本悠氏との共同研究である。カンドル 2-コサイクルがあると、シフト鎖写像を用いてカンドル 3-コサイクルが得られる。このとき古典的結び目に対し、カンドル 3-コサイクルから得られるシャドウコサイクル不変量は、元のカンドル 2-コサイクルから得られるコサイクル不変量と一致してしまうことがわかった。また曲面結び目に対し、(カンドル 2-コサイクルからシフト写像で作った)カンドル 3-コサイクルから得られるコサイクル不変量は自明になってしまうことも分かった。その他、素数位数の二面体カンドルと四面体カンドルについて、シフト鎖写像の振る舞いを考察した。得られた成果を国内外の研究集会で講演し、プレプリントとしてまとめ、学術誌から出版することができた。

### (4) 球面結び目の結び目カンドルについて

これは大阪大学の谷口雄太氏との共同研究である。ファイバー球面結び目の結び目カンドルが一般化されたアレキサンダーカンドルの構造を持つことに着目し、ツイストスパン結び目の場合にそのタイプと呼ばれるカンドルの不変量を計算することができた。これにより、結び目群は同じだが結び目カンドルは異なる球面結び目の例を与えることに成功した。また、結び目カンドルが有限であるようなツイストスパン結び目を分類することもできた。得られた成果を国内外の研究集会で講演し、現在プレプリントにまとめている最中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Sato Kouki, Tanaka Kokoro	4. 巻 54
2. 論文標題 The bridge number of surface links and kei colorings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1763 ~ 1771
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12654	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Carter J. Scott, Ishii Atsushi, Saito Masahico, Tanaka Kokoro	4. 巻 287
2. 論文標題 Homology for quandles with partial group operations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 19 ~ 48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2017.287.19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hashimoto Yu, Tanaka Kokoro	4. 巻 375
2. 論文標題 Shifting chain maps in quandle homology and cocycle invariants	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 7261 ~ 7276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8707	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 3件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 田中 心
2. 発表標題 結び目群は同じだが結び目カンドルは異なる球面結び目
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中 心
2. 発表標題 二次元結び目の結び目カンドルと結び目群について
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会「トポロジー分科会」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田中 心
2. 発表標題 結び目彩色多項式と1-タングルのカンドル彩色不変量について
3. 学会等名 N-KOOKセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中 心
2. 発表標題 Knot coloring polynomial and the invariant using quandle colorings of 1-tangles
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 Shifting chain maps in quandle homology and cocycle invariants
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー-2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 曲面絡み目の橋指数と圭彩色
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 Independence of Roseman moves for surface knots
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 Quandle 2-cocycle invariants and shadow 3-cocycle invariants
3. 学会等名 2018年度琉球結び目セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 Quandle cocycle invariants and shadow cocycle invariants
3. 学会等名 Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Special Session on Algebraic and Combinatorial Structures in Knot Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 Homology theory for multiple conjugation quandles
3. 学会等名 Tsuda University Topology Workshop (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 バイカンドル彩色数とカンドル彩色数の関係について
3. 学会等名 東北結び目セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 A relation between biquandle colorings and quandle colorings
3. 学会等名 研究集会「4次元トポロジー」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中心
2. 発表標題 曲面結び目のbridge trisection (1) : tri-plane 図式の紹介
3. 学会等名 2017年度琉球結び目セミナー
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------