

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05250

研究課題名（和文）曲面群の指標多様体の写像類群作用による力学系的分解の幾何学

研究課題名（英文）The geometry of character variety given by the dynamics of mapping class group action

研究代表者

山下 靖 (Yamashita, Yasushi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：70239987

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：2次元および3次元の多様体の幾何構造として、双曲幾何構造は重要である。この構造を理解するため、2次元多様体の基本群の指標多様体の研究を行った。特に、2つの $SL(2, \mathbb{C})$ の要素によって生成されるクライン群のヨルゲンセン数の実現問題の研究を行った。また、 $SL(2, \mathbb{C})$ の要素をランダムに2つ発生させたときに、それがいつクライン群を与えるかという問題について、計算機実験を用いた研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現代の位相幾何学における主要な研究対象である図形に多様体とよばれるものがあり、それらがどのような形の変形を許容するのかという問題にアプローチすることは、数学の研究を進める上で基本的な意義がある。さらに、力学系などの解析的な手法や群の作用という代数との関係を明らかにすることにより、分野間の新たなつながりの解明に貢献した。また、本研究は手法としては計算機実験を特徴としており、計算機の応用領域を数理科学に広げるといった形での意義もある。

研究成果の概要（英文）：Hyperbolic geometry is important in studying two and three-dimensional manifolds. To understand this geometric structure, we studied the character variety of the fundamental group of two-dimensional manifolds. In particular, we studied the realization problem of Jorgensen numbers of the Kleinian groups generated by two elements. Also, we performed a computer experiment on the problem of when randomly generated two parabolic elements give a Kleinian group.

研究分野：位相幾何学

キーワード：双曲幾何学 クライン群

1. 研究開始当初の背景

曲面の基本群からリー群 G への表現全体の空間 $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ には、 G が共役により作用する。この作用による幾何学的不変式論の意味での商空間 $X = \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G$ を指標多様体という。 X を、表現の像が G の離散部分群になる領域とそうでない領域に分割すると、前者は X の幾何構造の変形の空間とみなすことができ、重要な研究対象である。(幾何的分解) また、 X には写像類群が自然に作用し、この作用の複雑さ(エルゴード性)によっても X は2つに分解される。(力学系的分解) 2つの分解はタイヒミュラー空間論およびクライン群論において注目を集めつつあるが、両者の関係は未解決問題となっている。

幾何的分解 指標多様体 X の要素は、対応する表現の像が $SL(2, \mathbb{C})$ の中で離散群となっている場合には曲面の双曲幾何構造を与えるため、 X を離散表現からなる部分 D とそうでないものからなる部分 D' の2つに分解して考えることはこれまでよく行われてきた。特に基本的な例として、曲面が1つ穴あきトーラスであるとき、 D の中で擬フックス群にあたる部分は Jorgensen により構造が決定され、結び目の補空間の双曲構造にあたる部分も詳細に研究されている。しかし、 D の完全な分類は未解決であり、 X 全体を理解するためにも、 D 内の表現の幾何構造も考えることが今後重要になると思われる。しかし、 D の要素は双曲多様体を与えないため、 D での研究手法が通用しない。

力学系的分解 一方、 X を写像類群の作用が固有不連続に作用する部分 P とそうでない部分 P' に分ける「力学系的分解」も考えられる。タイヒミュラー空間上には写像類群が固有不連続に作用するので、素朴には幾何学的分解と力学系的分解は一致するようにも思える。しかし驚くべきことに近年 Minsky により定義された原始安定と呼ばれる X のクラスは P の部分集合でありながら D' の要素も含むことが示され、上の素朴な考えの反例を与えると共に近年注目が高まっている。しかし、 P の要素の幾何的意味については、現状ではほぼ何もわかっていない。

Q 条件 曲面が1つ穴あきトーラスの場合には、指標多様体上の写像類群の作用に関連して Bowditch, Tan-Wang-Zhang らが擬フックス群の研究および McShane の等式を動機として Q 条件と呼ばれるものを導入し、研究を行ってきている。McShane の等式は近年 Mirzakhani によるモジュライ空間の Weil-Petersson 体積の計算で本質的な役割を果たすなど、発展が期待されている。しかしこの分野はまだ不明な点も多く、Minsky も原始安定性と Q 条件の関係などが、重要な未解決問題として挙げていた。

2. 研究の目的

本研究課題では上記2つの分解間の関係を解明することを研究目的とする。

本研究ではリー群 G として $SL(2, \mathbb{C})$ を扱うことにする。この場合の指標多様体の分解としては3通りある。すなわち、表現の像が $SL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群(クライン群)になるか否かという幾何的分解、Minsky により定義された「原始安定性」をみたくどうかという力学系的分解、離散群の一種である擬フックス群の研究を動機として Bowditch, Tan-Wang-Zhang らにより導入された「Q 条件」をみたくどうかという分解である。本研究課題では以下の2点の研究を行うことにより、新たに原始安定性の幾何学を切り拓く。

1. 指標多様体における2種類の分解(Q 条件, 原始安定性)間の関係を解明する
2. 与えられた指標多様体の元が「Q 条件」をみたすための条件を幾何的に特徴付ける

3. 研究の方法

最初のステップとして、原始安定性判定アルゴリズムの開発と計算機上での実装を行う。次に原始安定性と Q 条件の関係を中心に研究を行う。最後に Q 条件の幾何的特徴付けを中心に研究を行う。

第1ステップ 原始安定性判定アルゴリズムの開発および計算機上での実装および計算機実験を中心に行う。そして、Q 条件の計算機実験の結果と合わせることで、両者の比較を行う。判定アルゴリズムの形は、ある一つの必要十分条件を計算機で計算するのではなく、表現が原始安定であることを示すための計算機上で計算可能な十分条件および、表現が原始安定でないことを示すための計算機上で計算可能な十分条件の2つを与えて、そして入力に対してこの2つのどちらか1つの成立が確認できればその結果を出力、どちらも成立しない場合は、「不明」という結果を出力するような形になる。具体的には曲面が単純な穴あきトーラスの場合で、原始安定であることを示すための条件の実装は完成している。そこで、以下の2つを行う必要がある。

- A) 上記アルゴリズムを種数2以上の場合に拡張する。
- B) 入力が原始安定でないことを示すための条件を与える。

上の A) に関しては、原始語とよばれる自由群の元の部分語に関する研究により拡張を行う。次の B) の方の十分条件については、Lubotzky による redundant 条件を使用する方法と、群の原始元に楕円のまたは放物的な元が含まれているのかどうかを探索する方法があり、後者を中心に検討する。この方法については、本研究代表者は Q 条件を研究する際に、類似の問題を研究して

きている。また、計算機実験を遂行するために、関連した数式処理関係のソフトウェアの導入を行う。

第2ステップ Q条件と原始安定性の比較(包含関係)に関して本研究代表者が Series 氏, Tan 氏と共に導入した一般化された Riley スライスと呼ばれる指標多様体の部分集合を中心に研究を進める。2つの具体的な目的のうちこちらを先にする理由は、第1ステップで計算機実験が進んでいて、両者の比較が可能になっているためと、本研究代表者がQ条件の研究を行ってきたためQ条件の性質の方が理解が進んでおり、取り組みやすいと考えたためである。また、Q条件は既に深く研究されており、これらの援用が重要な鍵となると思われる。

第3ステップ Q条件の幾何学的特徴付けを行う。本研究で開発するのアルゴリズムであらわれる有限ステップの条件の翻訳をすすめることにより、目標を達成する。

4. 研究成果

研究対象である $SL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群はクライン群と呼ばれる。2つの $SL(2, \mathbb{C})$ の要素によって生成されるクライン群のヨルゲンセン数の実現問題の研究を行った。ヨルゲンセン数はクライン群のある種の複雑さを表しているとみなすことができ、1以上の実数になることが古典的に知られていた。しかし、どのような実数がヨルゲンセン数の値になり得るのかについては、佐藤宏樹氏らの先駆的な研究以外にはあまり行われておらず、未解明となっていた。本研究代表者は、学習院高等部の山崎亮介氏とともにこの問題を解決し、実際1以上の任意の実数がヨルゲンセン数として実現されることを示した。用いた方法を簡単に説明すると、上で述べた指標多様体における離散群に対応する部分集合の解析を、対角スライスと呼ばれる部分集合において詳細に行うことで、1以上4以下のヨルゲンセン数の実現問題を解決し、4以上の場合についてはライリースライスと呼ばれる指標多様体内の別の部分集合に関する考察により解決した。また、関連した計算機実験も行い、今回与えたもの以外の実現方法がさらに多く存在することを予想している。

さらに、 $SL(2, \mathbb{C})$ の要素であって放物型と呼ばれるもの2つによって生成される群をランダムに発生させた場合に、それがどのような確率でクライン群になるか、という問題の研究を行った。まず、放物型の $SL(2, \mathbb{C})$ の要素全体の空間はコンパクトな空間ではないので、そこに幾何学的に意味のある確率密度関数を与えることが問題になるが、これについては先行研究があり、これを採用することにした。すると残りの問題は離散性の判定となるが、特別な $SL(2, \mathbb{R})$ の場合には理論的なアプローチを、より一般の $SL(2, \mathbb{C})$ の場合には計算機実験によるアプローチを行い、それぞれの場合における確率の評価を得ることに成功した。特に後者の場合においては、本研究代表者が行ってきた離散性判定に関するアルゴリズムを効果的に利用することに成功した。

最後に、 $SL(2, \mathbb{C})$ の部分群で楕円型の元2つによって生成されるクライン群で、算術的とよばれる条件をみたすものの分類のための研究を行った。楕円型の元はその位数で特徴づけることができるが、特に位数が2または3の場合において、どのような算術的クライン群が存在しうるかについて、計算機を用いた実験を行った。クライン群は指標多様体のパラメータを用いて記述され、それが算術的になるためにはそのパラメータが代数的整数であって四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件というものをみたさなければならないことが予想されている。そのため、これらに関する計算機実験を進めることで、算術的クライン群の完全分類に向けた候補を与えるための研究を進展させた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yamashita Yasushi, Yamazaki Ryosuke	4. 巻 23
2. 論文標題 The realization problem for J?rgensen numbers	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 17 ~ 31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ecgd/331	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Series Caroline, Tan Ser, Yamashita Yasushi	4. 巻 17
2. 論文標題 The diagonal slice of Schottky space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 2239 ~ 2282
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2017.17.2239	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Yasushi Yamashita
2. 発表標題 The diagonal slice of schottky space
3. 学会等名 Computational Problems in Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山下靖
2. 発表標題 メビウス変換群の離散性判定問題について,
3. 学会等名 第65 回トポロ ジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山下靖
2. 発表標題 The realization problem for Jorgensen numbers
3. 学会等名 ミニワークショップ ``Growth 4"
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山下靖
2. 発表標題 The realization problem for Jorgensen numbers
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 山下靖
2. 発表標題 The realization problem for Jorgensen numbers
3. 学会等名 「リーマン面・不連続群論」研究集会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yasushi Yamashita
<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----