

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05260

研究課題名（和文）円周への無限離散群の作用の剛性と柔軟性

研究課題名（英文）Rigidity and flexibility of actions of infinite discrete groups on the circle

研究代表者

松田 能文（Matsuda, Yoshifumi）

青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号：60549294

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：曲面群の円周への作用の剛性について、FrankelとThurstonにより提案されていた懸垂束の葉層調和測度を用いる方法により研究した。主な結果は懸垂束の平坦接続を調和測度について平均化して得られる主接続の曲率評価およびGauss-Bonnet型公式であり、その帰結として、作用の有界オイラー数が最大になるときの懸垂束の調和測度が記述でき、松元およびBurger-Iozzi-Wienhardによる剛性定理の別証明が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面群の円周へのフックス作用の剛性はこれまでに知られていなかったが、葉層調和測度を用いた別証明が得られたことにより、この事実のより深い理解が得られたと考えられる。また、その過程で、多くの葉層に対して存在が保証されているものの具体的に表示することは困難であるなど取り扱いが容易でない葉層調和測度について、その性質の解明および応用ができ、葉層の研究において葉層調和測度の有用性を示した点でも意義があるものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：We study rigidity properties of actions of surface on the circle. We follow the approaches of Frankel and Thurston proposed via foliated harmonic measures on the suspension bundles. Our main result is a curvature estimate and a Gauss-Bonnet formula for the principal connection obtained by taking the average of the flat connection with respect to a harmonic measure. As consequences, we give a precise description of the harmonic measure on suspension foliations with maximal bounded Euler number and an alternative proof of rigidity theorems of Matsumoto and Burger-Iozzi-Wienhard.

研究分野：位相幾何学

キーワード：円周への群作用 剛性 フックス群 有界オイラー数 葉層調和測度 回転数

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 円周への無限離散群の作用の研究は様々な目的の下で古くからなされているが、近年大きな進展が見られる。円周に作用する無限離散群の基本的な例として、オイラー数が負である曲面の基本群(曲面群)より一般にモジュラー群など2次元軌道体の軌道体基本群(2次元軌道体群)がある。曲面(あるいは軌道体)上の双曲構造により、これらの群の双曲平面の理想境界への作用(フックス作用)が誘導される。

(2) このうち、閉曲面群の作用に対しては、フックス作用が剛性を持つ、すなわち作用を変形しても元の作用と半共役になってしまうことが松元により証明されていた。さらに、Mannによりフックス作用の持ち上げも剛性を持つことが示されていた。これらの証明には作用のオイラー数、つまり作用から得られる円周束のオイラー数、が重要な役割を果たす。

(3) 一方、境界つき曲面群の作用に対しては、閉曲面群の作用のオイラー数の一般化である有界オイラー数と呼ばれる不変量が Burger-Iozzi-Weinhardにより導入された。そして、フックス作用が有界オイラー数を保つように変形しても元の作用と半共役になるという剛性を持つことが証明された。

2. 研究の目的

(1) 2次元軌道体群の円周への作用について、剛性を持つ作用を決定すること、および、剛性を持たない作用の柔軟性を明らかにすることを目的とした。

(2) 剛性を持つ作用を決定するために、フックス作用の持ち上げのうちで剛性を持つものの決定、および、フックス作用の持ち上げ以外の作用が剛性を持たないという予想の証明を目的とした。

(3) 剛性を持たない作用の柔軟性を明らかにするために、剛性を持たない作用の変形を具体的に構成すること、および円周への作用の空間の構造を有界オイラー数に関するスライスに注目して明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

(1) テストケースとして、モジュラー群など2つの有限巡回群の自由積について主に以下の～の事項を取り扱う。

フックス作用の持ち上げのうち剛性を持つものを決定する。その際には、Mannによる閉曲面のフックス作用が剛性を持つことの証明を参考にする。

フックス作用の持ち上げ以外の作用が剛性を持たないという予想の証明、および、剛性を持たない作用の変形の具体的な構成を行う。その際には、作用の有界オイラー数を保ちつついくつかの元の回転数が変化するような変形が存在することを証明し、さらに、そのような変形を具体的に構成する。回転数を制御するために Calegari-Walkerによる回転数の振る舞いの研究を参考にする。

円周への作用の空間の構造を明らかにする。その際には、作用の空間の有界オイラー数に関するスライスに注目し、スライスの変換成分の個数や連結成分に含まれる作用の半共役類の個数などを明らかにする。

(2) (1)で述べたテストケースを踏まえて、一般の境界付き2次元軌道体群について、上記の～の事項を取り扱う。このうち、については、Kim-Koberda-Mjによる双曲平面の等長変換群への表現の柔軟性の研究も参考する。ただし、余コンパクトな2次元軌道体群については、作用の有界オイラー数が有理数に限定されるので、必要に応じて閉曲面群の作用に関する結果も参考にする。

4. 研究成果

曲面群の円周への作用に付随する懸垂束を用いた作用の剛性に関して足立真訓氏・野澤啓氏との共同で研究を行った。

Frankel と Thurston によってそれぞれ独立に、曲面群の円周への作用の剛性を作用に付随する懸垂束の平坦葉層の葉層調和測度を用いて研究することが提案されていた。この方針に従って、彼らの議論の細部を埋めることによって、以下の(1)~(3)の結果を得た。

(1) 懸垂束の平坦接続を葉層調和測度で平均化して得られる主接続について、その曲率の評価を与えた。ここで、平坦接続および主接続は連続でしかなく滑らかとは限らないので、その曲率は弱い意味で考えることに注意する。曲率の評価で重要になるのは曲面のカスプの近くでの評価であり、この評価にはポアンカレ円板上正值調和関数に対する Harnack の不等式とユークリッド平面上の閉曲線に対する等周不等式を用いる。

(2) 作用の有界オイラー数を上記の曲率の曲面上での積分で表す Gauss-Bonnet 型公式が得られた。これは閉曲面群の作用に対してよく知られている結果の拡張である。今の設定では、曲面のカスプを切り落として得られるコンパクトな境界付き部分曲面において Gauss-Bonnet の公式が成り立っていて、その極限を考えることにより元の曲面における上記の Gauss-Bonnet 型公式が証明される。

(3) (1)、(2)で述べた結果の系として、作用の有界オイラー数が曲面のオイラー数の絶対値以下であるという Milnor-Wood の不等式が得られる。さらに、その不等式において等号が成り立つことと作用がフックス作用と半共役であるという剛性定理が証明された。これは、研究開始当初の背景として述べた Burger-Iozzi-Weinhard の結果の別証明となっている。この剛性定理は、Milnor-Wood において等号が成り立つときの葉層調和測度について調べることにより示される。Harnack の不等式の等号成立条件と等周不等式の等号成立条件を用いることにより、Milnor-Wood において等号が成り立つときの葉層調和測度がポアソン核を用いて表示できることが証明される。

葉層調和測度は多くの葉層に対してその存在が保証されている。その一方で、葉層調和測度を具体的に表示することは多くの葉層に対しては困難である。このような事情もあり、葉層調和測度を用いて葉層の性質を明らかにした研究はそれほど大きくない。上記の研究は、葉層の研究において葉層調和測度の有用性を示した点でも意義があるものと考えられる。

<引用文献>

M. Adachi, Y. Matsuda, H. Nozawa, Harmonic measures and rigidity for surface group actions on the circle, Preprint, arXiv:2207.08411, to appear in Algebraic & Geometric Topology.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 M. Adachi, Y. Matsuda, H. Nozawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Harmonic measures and rigidity for surface group actions on the circle	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 松田能文
2. 発表標題 Harmonic measures and rigidity for surface group actions on the circle
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------