

令和 5 年 5 月 21 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05261

研究課題名(和文) 双曲的トーシオン多項式と絡み目のDFJ予想に関する研究

研究課題名(英文) A study on hyperbolic torsion polynomials and a DFJ conjecture for links

研究代表者

森藤 孝之 (MORIFUJI, Takayuki)

慶應義塾大学・経済学部(日吉)・教授

研究者番号：90334466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、双曲結び目のファイバー性と種数に関するDunfield-Friedl-Jackson予想(DFJ予想)を一般化し、オリジナルのDFJ予想も含めて包括的に解決することを目標としている。得られた成果の概要は以下の通りである。

- (1) DFJ予想を双曲絡み目の場合に拡張して厳密に定式化し、特に双曲的2橋絡み目の無限系列に対して一般化された予想を証明した。
- (2) さらに広範な双曲絡み目のクラスに対して予想を証明するための足掛かりとして、双曲的3橋結び目の無限系列に対してDFJ予想を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、空間内の結び目(ひも)が持つ基本的性質であるファイバー性と種数に関する予想について、それ自身の解決を目指すとともに、予想自体を一般化することで包括的に問題を解決することを目標としている。予想の適用範囲を広げることで問題の本質を明らかにし、俯瞰的な立場で問題の解決を図るという視点は、数学研究のみならず様々な場面で有効である。本研究成果は、低次元トポロジーの分野において、この観点からの新たな一例を与えるものとみなすことができる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research was to extend a conjecture of Dunfield, Friedl and Jackson (we call it the DFJ conjecture for simplicity) on the genus and fiberedness of a hyperbolic knot in the 3-sphere and to comprehensively resolve it, including the original DFJ conjecture. A summary of the results is as follows.

- (1) We have formulated a generalized DFJ conjecture for a hyperbolic link in the 3-sphere rigorously, and in particular, have proved it for an infinite family of hyperbolic 2-bridge links.
- (2) As a stepping stone to prove the conjecture for a broader class of hyperbolic links, we have proved the original DFJ conjecture for an infinite family of hyperbolic 3-bridge knots.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：双曲的トーシオン多項式 DFJ予想 双曲絡み目

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

基本群をよく知られた群に表現し、多様体の幾何的な情報を代数的にとり出す手法は、トポロジーにおいて中心的役割を果たしてきた研究手段の一つである。一方、群とその表現に対して定まる不変量として、ねじれアレキサンダー多項式と呼ばれる多項式不変量が知られており、ここ15年程の間に応用面で大きく進展している。

Friedl と Vidussi は、3次元多様体の基本群から有限群へのすべての表現とそれに付随したねじれアレキサンダー多項式の情報を用いて、多様体のファイバー性(円周上の曲面束の構造が入る)とサーストンノルム(2次元ホモロジー上のセミノルムで曲面の複雑さを表す)が決定されることを示した。また、Dunfield-Friedl-Jackson は、3次元球面内の双曲結び目(補空間に有限体積完備双曲構造が入る)に対して、双曲構造から適当な意味で一意的に定まる $SL(2, \mathbb{C})$ -離散忠実表現に着目し、対応する不変量を双曲的トーシヨン多項式と呼んで詳しく考察している。彼らは計算機を駆使した大規模な数値計算に基づき、双曲的トーシヨン多項式のみで双曲結び目のファイバー性と種数が決定できると予想した(DFJ 予想)。

研究開始当初、この予想が確かめられていたのは、15交点以下の313,209個の双曲結び目、双曲的2橋結び目の無限系列、および、種数の決定に関して双曲的libroid結び目のみである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、双曲絡み目群のホロノミー表現に付随して定まる双曲的トーシヨン多項式の基本的性質を明らかにし、そこから得られる代数的性質を用いて、絡み目の幾何学的性質を特徴づける枠組みを与えることである。より具体的には、双曲結び目のファイバー性と種数に関するDFJ予想を双曲絡み目の場合に拡張し、絡み目群の $SL(2, \mathbb{C})$ -指標代数多様体の適当なスライス(ホロノミー表現のリフトを含む断面)の情報から、双曲絡み目のファイバー性とサーストンノルムを決定することを目標とする。大別すると、次の2点

- (1) 双曲絡み目に対する双曲的トーシヨン多項式の明示公式
- (2) 得られた多項式の性質と双曲絡み目のファイバー性およびサーストンノルムとの関係

を明らかにすることが目標となる。

3. 研究の方法

研究の目的欄で述べた2つの具体的な研究目標(1),(2)のうち、(2)は(1)の結果に大きく依存している。そこで研究の初期段階から一般的な設定の下で両者の考察を始めるのではなく、研究全体の見通しを良くするため、適度な一般性を持つ性質の良い双曲絡み目のクラスに対して(1)および(2)の研究を推進する。その様子を詳細に解析した後、より一般の双曲絡み目のクラスへと扱う対象を順次拡大していくという基本方針の下で研究を効果的に推進する。

4. 研究成果

以下、当該研究期間内に得られた研究成果を年度別に報告する。なお、本研究課題は4年間で実施する研究計画であったが、新型コロナウイルス(COVID-19)の世界的な感染拡大の影響を受けて、当初計画通りに研究を遂行することが難しい状況となり、研究期間を2年間延長して実施されたことを付記しておく。

(1) 2017年度(平成29年度)

上述の研究目標に対して本研究課題初年度の今年度は、(1)に焦点を絞って研究を行った。より具体的には、DFJ予想を3次元球面内の絡み目の場合に拡張して厳密に定式化し、とくに、双曲的2橋絡み目と呼ばれる広範な絡み目のクラスのある無限系列に対して、一般化されたDFJ予想が正しいことを証明した。一般化された予想、ならびに、定理の主張を正確に述べると次のようになる。

一般化されたDFJ予想. 3次元球面 S^3 内の向きの付いた双曲絡み目 L に対して、双曲的トーシヨン多項式の次数は、絡み目群のアーベル化から誘導される準同型のサーストンノルムの2倍に等しい。さらに、双曲的トーシヨン多項式がモニック多項式ならば、 L はファイバー絡み目である。

定理 A. 双曲的ダブルツイスト絡み目 $L=J(2m+1, 2n+1)$, (m, n は整数で $m, n \geq 0, -1$) の任意の向きに対して、一般化されたDFJ予想が成り立つ。

上記成果は、米国テキサス大学・ダラス校の Anh T. Tran 准教授との国際共同研究に基づい

ている。

また、奈良女子大学での国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」、ならびに、フランス・マルセイユの CIRM における国際研究集会「Representation Spaces, Teichmüller Theory, and their Relationship with 3-manifolds from the Classical and Quantum Viewpoints」をそれぞれ 2017 年 10 月と 2018 年 1 月に主催し、本研究課題に近い領域を専門とする研究者を、フランス人を中心に招聘した。そこで行った活発な議論が、上記成果を得るための強力な推進力となった。

(2) 2018 年度（平成 30 年度）

今年度は上記研究目標に対して、(1)と(2)の橋渡しに関わる部分に焦点を絞って研究を行った。より具体的には、平成 29 年度に行った双曲絡み目の DFJ 予想をサポートする絡み目の無限系列の構成の適用範囲をさらに広げるために、これまでオリジナルの DFJ 予想が示されていなかった双曲的 3 橋結び目のある無限系列に対して予想を証明した。定理の主張を正確に述べると次のようになる。

定理 B. 双曲的プレツェル結び目 $P(2k+1, 2k+1, 2k+1)$ (k は整数で $k \geq -1, 0$) に対して、DFJ 予想が成り立つ。

この研究成果は、米国テキサス大学・ダラス校の Anh T. Tran 准教授との国際共同研究に基づいている。

また、2018 年 10 月に国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」を奈良女子大学で主催し、フランスから 2 名の研究者 (Frederic Palesi 氏(Aix-Marseille Université), Michael Heusener 氏(Université Clermont Auvergne)) を招聘した。

(3) 2019 年度（令和元年度）

今年度は上記の研究目標に対して、(2)に関わる部分に焦点を絞って研究を行った。より具体的には、双曲絡み目の性質と対比させるために、双曲構造を許容しないトーラス絡み目のねじれアレキサンダー多項式を詳しく考察し、それが $SL(2, \mathbb{C})$ -指標代数多様体上で局所定数になるという結果を得た。定理の主張を正確に述べると次のようになる。

定理 C. μ 成分のトーラス絡み目 $L=T(\mu p, \mu q)$ の $SL(2, \mathbb{C})$ -既約表現に付随したねじれアレキサンダー多項式の各係数は、 $SL(2, \mathbb{C})$ -指標代数多様体上の局所定数関数である。さらに、 $SL(2, \mathbb{C})$ の $SL(n, \mathbb{C})$ -既約表現を合成した高次元表現に付随するねじれアレキサンダー多項式も同様の性質を持つ。

この成果は、米国テキサス大学・ダラス校の Anh T. Tran 准教授と創価大学の北野晃朗教授との共同研究に基づいている。

また、石川県政記念しいのき迎賓館において国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」を 2019 年 6 月に主催し、フランスから 2 名の研究者 (Michel Boileau 氏(Aix-Marseille Université), Greg McShane 氏(Institut Fourier, Université Grenoble Alpes)) を招聘した。

(4) 2020 年度（令和 2 年度）

今年度は、2 年前の段階では技術的な理由から取り扱うことが出来なかった 3 次元球面内の双曲的 3 橋結び目のある無限系列（偶数プレツェル結び目の無限系列）に対して、DFJ 予想の一部を証明した。さらに DFJ 予想の成否を検証する研究の一環として、 $SL(2, \mathbb{C})$ の高次元既約表現に付随したねじれアレキサンダー多項式に対して同様の問題を考察し、2 次元表現の場合と同様の振る舞いをするケースと、そうならないケースが生じることを、具体例の計算によって確かめることができた。

一方、これまで毎年継続して開催していた国際研究集会については、COVID-19 の影響により中止を余儀なくされた。

(5) 2021 年度（令和 3 年度）

2. 欄で述べた研究目標に対して今年度は、絡み目の持つ対称性と双曲構造の変形の観点から、 $SL(2, \mathbb{C})$ の高次元既約表現に対する双曲的トーション多項式の持つ代数的性質について詳細な考察を行った。より具体的には、(完備とは限らない)双曲構造を持つ結び目 K に対して、 K の鏡像 K^* の双曲的トーション多項式と、 K の双曲的トーション多項式の関係性を記述する等式の導出に成功した。これを用いることで、双曲結び目 K がもろて型である (K と K^* が等しくなる) 必要条件を双曲的トーション多項式の言葉で明確に記述することができた。定理の

主張を正確に述べると次のようになる。

定理 D. K の双曲的トーシオン多項式の係数は、 K の双曲的トーシオン多項式の係数の複素共役で与えられる。同様の主張は、完備とは限らない双曲構造に対応したホロノミー表現に付随するねじれアレキサンダー多項式についても成立する。

系 E. 双曲結び目 K がもろて型ならば、双曲的トーシオン多項式の係数は実数である。さらに、 K がツイスト結び目と呼ばれる双曲結び目の無限系列の場合には、この必要条件は十分条件になる。

この成果は、東京農工大学の合田洋教授との共同研究に基づいている。

一方、前年度は COVID-19 感染拡大の影響により開催を断念せざるを得なかった国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」を、海外からの講演者 2 名 (Fathi Ben Aribi 氏 (Université Catholique de Louvain), Georgios Kydonakis 氏 (Universität Heidelberg)) を招待して 2022 年 1 月にオンライン形式で開催した。日本国内だけでなく、フランス、スペイン、ドイツ、ベルギーからの参加もあり、最新の研究成果についての報告を聞くとともに、本分野における今後の問題意識の共有を図ることができた。

(6) 2022 年度 (令和 4 年度)

本研究課題最終年度の今年度は、昨年度までに得られた研究成果を論文として公表するための準備に注力した。また、これまでとは異なるアプローチで研究目標を達成するための手法の開発を模索した。より具体的には、8 の字結び目や三葉結び目補空間を例として含む 3 次元多様体の無限系列 (1 点穴あきトーラスをファイバーとする円周上の曲面束のうち、トンネル数が 1 であるクラス) に対して、それらの基本群の既約表現の 1-パラメータ族 (Mangum-Shanahan 表現) に付随したねじれアレキサンダー多項式の明示公式、および、その特殊値として得られる Reidemeister トーシオンの明示公式を与えた。

この成果は、米国テキサス大学・ダラス校の Anh T. Tran 准教授との国際共同研究に基づいている。

また、今年度は国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」を、2022 年 10 月に奈良女子大学で 3 年ぶりに対面開催で実施した。COVID-19 の影響により海外から研究者を招聘するのが難しい状況であったため、日本国内に滞在していた本研究課題に近い領域を専門とする外国人研究者を 2 名招聘した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takayuki Morifuji	4. 巻 75
2. 論文標題 Simple Hurwitz groups and eta invariant	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/88218821	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Morifuji Takayuki, Tran Anh T.	4. 巻 21
2. 論文標題 Hyperbolic torsion polynomials of pretzel knots	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Geometry	6. 最初と最後の頁 265-272
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/advgeom-2020-0017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Teruaki Kitano, Takayuki Morifuji, Anh T. Tran	4. 巻 29
2. 論文標題 Twisted Alexander polynomials of torus links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2050016-1-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216520500169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takayuki Morifuji, Anh T. Tran	4. 巻 53
2. 論文標題 Twisted Alexander polynomials of hyperbolic links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 395-418
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/53-3-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Teruaki Kitano, Takayuki Morifuji	4. 巻 26
2. 論文標題 A note on Riley polynomials of 2-bridge knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse. Mathematiques (6)	6. 最初と最後の頁 1211-1217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/afst.1565	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 Mangum-Shanahan curves in $SL(3, \mathbb{C})$ -character varieties
3. 学会等名 上教大トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takayuki Morifuji
2. 発表標題 Simple Hurwitz groups and eta invariants
3. 学会等名 BOSTON UNIVERSITY/KEIO UNIVERSITY/Tsinghua University Workshop 2021, Geometry and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 双曲的トーシヨン多項式と随伴トーシヨン多項式
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 双曲結び目・絡み目のねじれAlexander多項式
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会トポロジー分科会特別講演（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 双曲結び目・絡み目のねじれAlexander多項式
3. 学会等名 第67回トポロジーシンポジウム・オンライン（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 単純フルビッツ群とエータ不変量
3. 学会等名 北海道大学幾何学コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 On adjoint torsion polynomials of hyperbolic genus one two-bridge knots
3. 学会等名 山梨大学トポロジーセミナー（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 単純Hurwitz群とeta不変量について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会トポロジー分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 単純Hurwitz群について
3. 学会等名 慶應トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 2橋絡み目のRiley多項式について
3. 学会等名 研究会「種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用」（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森藤 孝之
2. 発表標題 トラス絡み目のねじれアレキサンダー多項式について
3. 学会等名 研究会「低次元多様体の幾何的性質と不変量の研究」（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds	開催年 2021年～2022年
国際研究集会 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds	開催年 2017年～2019年
国際研究集会 Representation Spaces, Teichmüller Theory, and their Relationship with 3-manifolds from the Classical and Quantum Viewpoints	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Texas, Dallas			