

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 21 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05271

研究課題名(和文)幾何学的手法による力学系の可積分構造の研究

研究課題名(英文) Research on integrable structure of dynamical systems by geometric methods

研究代表者

竹縄 知之 (Takenawa, Tomoyuki)

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：70361805

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、離散力学系の各種性質を、相空間の幾何構造への作用を通じて明らかにすることである。具体的な成果としては、ピカル群への抽象的な作用から、それを実現する双有理写像を構成する一般的な公式を発見し、可積分構造を保った非自励化の手法を確立した。また、高次元の力学系に対してもその作用が適切に表現される相空間(初期値空間)を構成する手法を確立した。可積分ではない高次元力学系に対しても、代数的に安定な多様体を作る方法を見出した。さらにQuispel-Roberts-Thompson写像と呼ばれる楕円曲面の自己同型写像に対して、自然な解の構成法を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系には時間変数に関して連続的なものと離散的なものがあるが、連続のものは離散的なもの極限として得られることから、離散的なものの方がより一般的である。離散力学系の性質を調べる有力手段の一つにそれが自然に作用する初期値空間と呼ばれる多様体を構成し、その多様体の性質を調べるという方法がある。さらに多様体については代数幾何等の道具を使って性質を調べることができる。本研究はこのような方向で進めたものであり、特に高次元の場合や、可積分なときについて新たな手法を提案した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study is to clarify various properties of discrete dynamical systems through actions on the geometric structure of phase spaces. As a concrete result, we found a general formula for constructing bi-rational maps from abstract actions on Picard groups, and established a method of deautonomization that preserves integrable structures. We also established a method for constructing a phase space (initial value space) in which the action is appropriately represented for higher dimensional dynamical systems. For higher dimensional dynamical systems that are not integrable, we found a way to construct algebraically stable manifolds. Furthermore, we proposed a natural solution construction method for the Quispel-Roberts-Thompson map, which is a self-isomorphic map of elliptic surfaces.

研究分野：力学系

キーワード：パンルヴェ方程式 力学系 初期値空間 対称性

1. 研究開始当初の背景

一般に可積分な力学系とは、代数的に記述され、時間発展について可逆な有限自由度の力学系であって、何らかの可積分構造を持つものと考えられる。その中でも微分方程式で記述されるものは連続系、差分方程式で記述されるものは離散系と呼ばれる。

可積分方程式の中でも特に重要なのが、パンルヴェ性という性質を満たす常微分方程式(パンルヴェ方程式)で、可解格子模型やソリトン方程式など無限自由度の場合も含め、その可積分性はパンルヴェ性に帰着される。

パンルヴェ方程式は、オリジナルの微分方程式の直接的な分類の他に、線形常微分方程式のモノドロミー保存変形や、岡本の初期値空間(初期値が定義される空間を、解のフローが適切に流れるように取り直した空間、図1)と呼ばれる代数曲面の分類からも得られる(岡本)。これらの手法はパンルヴェ方程式の離散化と相性が良く、近年盛んに研究されている。特に、離散パンルヴェ方程式は、方程式に現れる係数が独立変数に関して線形に発展するもの(いわゆる差分)、幾何級数的に発展するもの(q差分)、複素トーラス上で線形に発展するもの(楕円差分)の3種に類別できることが知られている(坂井)。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散力学系の各種性質を、相空間の幾何構造への作用を通じて明らかにすることである。具体的な成果としては、ピカル群への抽象的な作用から、それを実現する双有理写像を構成する一般的な公式を発見し、可積分構造を保った非自励化の手法を確立した。また、高次元の力学系に対してもその作用が適切に表現される相空間(初期値空間)を構成する手法を確立し、いくつかの完全可積分力学系に対しては初期値空間を具体的に構成し、非自励化を行った。対称性を求めた。

可積分ではない高次元力学系に対しても、代数的に安定な多様体を作る方法を見出し、いくつかの例に対して代数的エントロピーを計算した。

さらに Quispel-Roberts-Thompson 写像と呼ばれる楕円曲面の自己同型写像に対して、複雑な変数変換を伴わないという意味で自然な解の構成法を提案した。可積分ではない高次元力学系に対しても、代数的に安定な多様体を作る方法を見出した。さらに Quispel-Roberts-Thompson 写像と呼ばれる楕円曲面の自己同型写像に対して、自然な解の構成法を提案した。

3. 研究の方法

本研究は基本的に数学の理論の研究であり、国外の共同研究者との共同、または単独で仮設・計算・検証を繰り返すことにより、新たな公式を発見したり、証明をしたりした。だし、本研究の対象である可積分系や具体的な多様体の計算は非常に複雑でノートとペンだけで行うことは難しく、数式処理ソフトやときには数値計算を援用して行う必要があった。本研究の共同研究者

は国外の研究者であったため、研究上のやり取りは主として電子メールと、当初は実際に行き来して行っていた。しかし、途中でコロナ禍になり対面での実施が難しくなったため、代わりに遠隔会議ソフトを使用して行った。特に特例延長を行った R3 年度は専ら遠隔会議ソフトを利用して共同研究を行った。

4. 研究成果

H29 年度

まず、有理多様体のピカル群上の与えられた作用に対して、それを実現する力学系を構成する簡単な公式を発見した。この公式は力学系が同型ではない場合や、双有理でない場合にも成り立つ一般的なものである。また、ルーマニア物理核工学研究所の A. S. Carstea 氏、ノーザンコロラド大学の A. Dzhamay 氏と協力して、可積分力学系の非自励化について研究した。具体的には、有理楕円曲面の自己同型の簡潔な表示である Quispel-Roberts-Thompson 写像を非自励化することにより、離散パルヴェ方程式の新たな簡潔な表示を得た。この手法においては、一つの QRT 写像から複数のタイプの異なる離散パルヴェ方程式が導かれるということ、また、QRT 写像が簡潔な表示を持つことを受け継いで、結果として得られる離散パルヴェ方程式も簡潔な表示を持つことに特徴がある。

これらの結果を論文としてまとめ、Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical に投稿し掲載された。なお、この論文は IOP publishing により、IOP select として採択され、出版から 1 年間オープンアクセスとなった。

H30 年度

線形常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られた離散パルヴェ方程式に対して、それが既知のどのタイプの離散パルヴェ方程式と一致するかというのは非自明な問題である。この問題に対し、ノーザンコロラド大学の A. Dzhamay 氏と協力して、純粋に幾何学的な考察のみを利用して、既知の離散パルヴェ方程式に一致させる具体的な変換公式を見つける手法を提案し、論文が SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 誌に掲載された。

R1 年度

まずいくつかの 4 次元のパルヴェ系について、その離散対称性を用いて岡本-坂井の意味での初期値空間を構成できることを示した。そのうち A5(1)型アファインワイル群の対称性を持つものと、A2(1)+A2(1)型アファインワイル群対称性を持つものに関して、ルーマニア物理核工学研究所の A. S. Carstea 氏と共同で一般理論とともに論文にまとめた (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical に掲載)。2 次元を超える次元での初期値空間の構成は先行研究がほとんどないが、あっても代数的な構造が不明であったが、本研究では 2 次元のときに坂井氏が行ったのと同様に、良くわかっている多様体 (例えば CP^1 の直積) からブローアップのみで構成することにより、そのホモロジー・コホモロジーの構造が明らかであり、結果としてルート系がホモロジー・コホモロジー双対空間の中で自然に実現できることを示した。また、同様の手法は論文で取り上げた系以外にも適用可能であることがいくつかの計算例から分かっている。

次に、やはり A. S. Carstea 氏と共同でスーパー対称性を持つ KdV 方程式の力学系への簡約化について研究し、興味深い例として 4 次元の力学系であって、Grammaticos-Ramani 特異点閉

じ込めの可積分性判定条件は満たさないが、代数的次数の増大度が2であるものを発見した。これについてまとめた論文が、Journal of Physics に掲載された。また、この研究で得られた4次元力学系の「初期値空間」(正確には代数的に安定な空間)の構成及び応用について論文にまとめた論文が Springer Proceedings in Mathematics & Statistics に掲載可として受理された。

R2 年度

前年度に引き続き、4次元のパンルヴェ系について、その離散対称性を用いて岡本-坂井の意味での初期値空間を構成した。特に、藤・鈴木・津田系と呼ばれるA型アファインワイル群の対称性を持つパンルヴェ系に対し初期値空間を構成した。本研究以前には、2次元を超える次元での初期値空間の構成例はほとんどなかったが、本研究では、2次元のときに坂井氏が行ったのと同様に、良くわかっている多様体(例えばCP1の直積)からブローアップのみで構成することにより、そのホモロジー・コホモロジーの構造が明らかにし、結果としてルート系がホモロジー・コホモロジー双対空間の中で自然に実現できることを示した。このことについて単独でまとめた論文がRIMS Kokyuroku Bessatsu より出版された(R3年度)。また、4次元ガルニエ系についても初期値空間を構成した。得られた多様体はかつて木村弘信氏が別の手法で求めたものと同様のものであった。これらの結果を2021年3月の日本数学会の特別講演で報告した(予稿集にも掲載)。

また、シドニー大学のJoshi氏やSingh氏と共同で、第2パンルヴェ階層に属する微分方程式について調べた。微分方程式の形式解を用いても、離散対称性を用いても同じ多様体を得られたが、これまでのように因子類群への作用が同型とはならなかった。その原因は、微分方程式のパンルヴェ性に由来するものと想像されるが、詳細については不明である。このことについて報告する論文を準備中である。

R3 年度

本研究課題はR2年度までの予定であったが、コロナ禍で研究成果の発信が十分にできなかったことからR3年度まで期間を延長した。ただし、当然であるが研究も継続して行った。特に本年度は有理楕円曲面上のファイバー構造を保つ力学系である Quispel-Roberts-Thompson 写像の初期値問題について、上海大学および東京海洋大学の博士後期課程学生である Xing Li 氏と共同で、新たな解法を提案した。この解法では、本課題の初期に非自励化において扱った楕円トーラスの $P1 \times P1$ への埋め込みについて、そのパラメーターおよび曲面上の因子類の楕円トーラスへの引き戻しを楕円積分を用いて計算することを利用した。なお、この埋め込み自体はもともと Painleve 方程式の統一した記述を作るために Kajiwara-Noumi-Yamada によって提案されたものである。この結果を Solving the Quispel-Roberts-Thompson maps using Kajiwara-Noumi-Yamada's representation of elliptic curves というタイトルで Journal of Physics A 誌に投稿し受理された。また、数式処理システムを用いた実装を公開した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Adrian Stefan Carstea, Tomoyuki Takenawa	4. 巻 338
2. 論文標題 An Algebraically Stable Variety for a Four-Dimensional Dynamical System Reduced from the Lattice Super-KdV Equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Asymptotic, Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 43--53
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-57000-2_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tomoyuki Takenawa	4. 巻 B87
2. 論文標題 Space of initial conditions for the four dimensional Fuji-Suzuki-Tsuda system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 99--111
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Carstea Adrian Stefan, Takenawa Tomoyuki	4. 巻 52
2. 論文標題 Space of initial conditions and geometry of two 4-dimensional discrete Painlevé equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 275201 ~ 275201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ab2253	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Carstea A. S., Takenawa T.	4. 巻 60
2. 論文標題 Super-QRT and 4D-mappings reduced from the lattice super-KdV equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 093503 ~ 093503
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5119690	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Carstea A. S., Takenawa T.	4. 巻 338
2. 論文標題 An algebraically stable variety for a four-dimensional dynamical system reduced from the lattice super-KdV equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.	6. 最初と最後の頁 45--53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-57000-2_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Dzhamay, T. Takenawa	4. 巻 18, Paper No. 075
2. 論文標題 On some applications of Sakai's geometric theory of discrete Painleve equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 20pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.075	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Adrian Stefan Carstea, Anton Dzhamay, Tomoyuki Takenawa	4. 巻 50-405202
2. 論文標題 Fiber-dependent deautonomization of integrable 2D mappings and discrete Painleve equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aa86c3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件／うち国際学会 6件）

1. 発表者名 竹縄知之
2. 発表標題 高次元パンルヴェ系の初期値空間と対称性
3. 学会等名 日本数学会2021年度会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 The space of initial conditions for some 4D Painleve systems
3. 学会等名 The Eleventh IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹縄知之
2. 発表標題 いくつかの4次元パンルヴェ方程式系の初期値空間
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「可積分系数理の深化と展開」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 Space of initial conditions for some 4D Painleve systems
3. 学会等名 Asymptotic, Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 Space of initial conditions for some 4D Painleve systems
3. 学会等名 Symmetries and Integrability of Difference Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹縄 知之
2. 発表標題 いくつかの4次元パンルヴェ方程式系の初期値空間
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 A factorization formula for rational mappings and tau functions
3. 学会等名 The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 The space of initial conditions for some 4D Painleve systems
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹縄知之
2. 発表標題 いくつかの4次元パンルヴェ方程式に対する初期値空間
3. 学会等名 青山数理セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 竹縄知之
2. 発表標題 有限次元力学系に対する岡本-坂井の初期値空間の方法について
3. 学会等名 紀尾井町数理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Xing Li and Tomoyuki Takenawa
2. 発表標題 Solving the Quispel-Roberts-Thompson maps using Kajiwara-Noumi-Yamada's representation of elliptic curves
3. 学会等名 The Twelfth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

高次元パウルヴェ系の初期値空間と対称性（日本数学会講演資料） http://www2.kaiyodai.ac.jp/~takenawa/Takenawa_sugakukai2021.pdf

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ルーマニア	ルーマニア物理核工学研究所			
オーストラリア	シドニー大学			
米国	ノーザンコロラド大学			
中国	上海大学			