

令和 4 年 6 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05277

研究課題名（和文）非可換解析学と関数解析的群論の展開

研究課題名（英文）Noncommutative Analysis and Functional Analytic Group Theory

研究代表者

小沢 登高（Ozawa, Narutaka）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：60323466

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：群は与えられた構造の対称性を記述するための数学的言語であり、科学研究全般において自然に表れる、基本的かつ重要な研究対象である。これまでの群の研究では主に代数学的あるいは幾何学的なアプローチが取られることが多かった。本研究計画では、解析学的手法を用いて群の大雑把ではあるが頑健な幾何学的情報を精密かつ繊細な代数学的構造解析に繋げる研究を行った。このことにより、それまで無関係であった分野を結び付け、未解決問題を解決するのみならず、新たな研究領域を切り開いた。特に自由群自己同型群の剛性に関する著名未解決問題を解決するという大きな成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自由群自己同型群は最も普遍的な対称性そのものに内在する対称性を記述する数学的言語である。この群が剛性を持つか否かは著名な未解決問題であったが、本研究計画ではそれを肯定的に解決しており、研究成果の学術的価値は極めて高い。この研究成果には、実験数学及び工業数学において使われている積置換アルゴリズムに関する応用も存在する。積置換アルゴリズムは与えられた群においてランダムサンプリングを行うアルゴリズムとして高性能であることが経験上知られてきたが、自由群自己同型群の剛性定理により、積置換アルゴリズムが実際に高性能であることの数学的な保証が得られた。

研究成果の概要（英文）：A group is the mathematical term to study the symmetry that given objects have. The notion of a group naturally arises in various scientific studies and are considered one of the most basic and important objects of study. In literature, groups are mostly studied with algebraic or more recently geometric methods. The present research has focused on developing analytic methods for the study of groups. Analytic methods are used to connect the rough but robust geometric information of groups to the precise but fragile algebraic structural investigation. Our methods has connected previously unrelated areas of study and open up a new study horizon. In particular, we have solved the well-known longstanding problem about the rigidity aspect of the automorphism group of a free group, which is the group of the symmetry that the universal symmetry carries.

研究分野：作用素環論

キーワード：関数解析 解析的群論

### 1. 研究開始当初の背景

群は与えられた構造の対称性を記述するための数学的言語であり、科学研究全般において自然に表れる、基本的かつ重要な研究対象である。群はもとより代数学的な存在であるため、これまでの群の研究では主に代数学的あるいはより近年においては M. Gromov の提唱した幾何学的なアプローチが取られることが多かった。

自由群  $F_d$  は最も普遍的な対称性を記述する群であり、その自己同型群  $\text{Aut}(F_d)$  は最も普遍的な対称性そのものに内在する対称性を記述するための群である。自由群自己同型群は、抽象的な無限群論の研究が始まって以来 100 年に亘ってよく研究されてきているが、未解明の部分が非常に大きいとても興味深い研究対象である。自由群自己同型群の簡易版とも言える算術群  $\text{Aut}(Z^d) = \text{GL}_d(Z)$  が Kazhdan の性質 (T) と呼ばれる剛性を持つことは極めて応用範囲の広い重要な定理である。算術群  $\text{GL}_d(Z)$  の剛性は証明されて既に半世紀以上たつたが、自由群自己同型群の場合には未解決であった。

### 問題 1 : 自由群自己同型群 $\text{Aut}(F_d)$ は剛性を持つか？

この問題は幾つもの教科書にも記載されている著名な未解決問題で、解答が肯定的であるか否定的であるかについての定見もなく、手掛かりも全くない状況であった。積置換アルゴリズムは与えられた有限群においてランダムサンプリングするためのアルゴリズムで、GAP や SAGE といった標準的な数式処理ソフトにも搭載されており、実験数学及び工業数学において有用である。積置換アルゴリズムが高性能であることは経験的に知られている。なぜ高性能であるかの論理的な説明は存在してこなかったが、2000 年ごろにもし自由群自己同型群が剛性を持つのであれば、積置換アルゴリズムが高性能であることを説明できるとの指摘が A. Lubotzky 及び I. Pak によりなされた。これは積置換アルゴリズムが自由群自己同型群の有限等質空間におけるランダムウォークと見なせるという事実による。

また積置換アルゴリズムではランダムサンプリングのためシャッフルする回数を指定することになるのだが、何回シャッフルするのがもっとも効率的なのかについての論理的な見解はほとんどなかった。もし積置換ランダムウォークにカットオフと呼ばれる現象が存在するのであれば、カットオフが起きた時点でシャッフルをやめるのが積置換アルゴリズムを最も効率的に行うことになることが数学的に証明される。カットオフ現象とは、秩序相からランダム相への急激な相転移が起こることを指している。例えばトランプカードを (リフル) シャッフルすることを考えると、ほとんど混ざっていない状態から十分に混ざった状態へ急激に変化すること (つまり半分くらい混ざった状態が途中で短期間しか現れない) が知られている。52 枚のトランプカードの場合、6~8 回目付近でカットオフ現象が起きる。シャッフルの回数が 6 回以下ではシャッフルした意味がほとんどなく、9 回以上はほぼ完全にランダムになっているのでそれ以上シャッフルすることに積極的な意味はない。どのような確率過程がこうしたカットオフを持つのかを知ることは興味深いことである。

### 問題 2 : 積置換ランダムウォークはカットオフを持つか？

なおこの問題では 52 枚のトランプカードといった単一かつ有限の問題 (そのようなものは計算機で簡単に解ける) ではなく、有限問題の無限系列を扱う。具体的には自由群自己同型群  $\text{Aut}(F_d)$  を固定して、積置換アルゴリズムを適用する有限群を自由に動かすことを考えている。(別問題として、有限群を固定しておいて自由群自己同型群  $\text{Aut}(F_d)$  の  $d$  を動かす場合もあるが、こちらは自由群自己同型群とはあまり関係のない問題となる。) 自由群自己同型群の剛性が示された場合、つまり問題 1 が肯定的に解決した場合、積置換アルゴリズムはエクスペンダーという性質を持つことになる。エクスペンダーランダムウォークでは確率過程がランダム相に至る混合時間は対数的となるので、積置換アルゴリズムが高性能であることが数学的に保証されるのである。問題 2 については (問題 1 の解答次第ではあるが) より一般に次の問題が有名である。

### 問題 3 : (等質) エクスペンダーランダムウォークはカットオフを持つか？

問題 3 の解答が肯定的であるというのが Y. Peres による有名な予想であるが、成否についての大勢意見は存在していない。エクスペンダー的性質の中でも最も著しいものがラマヌジャンのと呼ばれているが、ラマヌジャンランダムウォークがカットオフを持つことは 2016 年に E. Lubetzky 及び Y. Peres により証明されている。

## 2. 研究の目的

本研究計画は、解析学的手法を用いて群の大雑把ではあるが頑健な幾何学的情報を精密かつ繊細な代数的構造解析に繋げることを目的とした。このことにより、それまで無関係であった分野を結び付け、未解決問題を解決するのみならず、新たな研究領域を切り開くためである。解析学的手法の中でも、無限次元の位相ベクトル空間およびその上の代数を扱う作用素環論的手法あるいは関数解析学的手法を用いる。

特に自由群自己同型群の剛性に関する著名未解決問題を解決することを目指した。複雑な現象に対処する際には、特に、作用素環論に代表される関数解析学的手法を用いた、簡明かつ概念的なアプローチを試みる。その結果として定性的にきれいな結果が得られるのであれば、定量的な情報が失われることは気にしないものとする。与えられた群が剛性を持つことを検証するため、関数解析学的手法を利用した新手法を開発し、それを自由群自己同型群  $\text{Aut}(F_d)$  に適用することを目指した。自由群自己同型群が剛性を持つことが示されれば、積置換アルゴリズムが高性能であることの数学的保証が得られるからである。

また本研究計画では、積置換ランダムウォークがカットオフを持つことを示すことを目指した。カットオフが示されれば、カットオフが起きた時点でシャッフルを止めるのが積置換アルゴリズムをもっとも効率的に行うことになることを数学的に証明できるからである。

## 3. 研究の方法

数学の研究はアイデア勝負である。実際の研究には、個人で行う部分と他者と協力して行う部分がある。大部分は個人で紙とペンを使いアイデアを練り、成すべきことが分かったら集中して研究を深めるものである。しかし、アイデアが枯渇したときや、そもそも自分にないアイデアを求めて他者とアイデアの交換を行うことは研究が自分の想定を超えて展開するために重要なことである。時には計算機を動かして非厳密な実験を行ったり、厳密な証明を行ったりもする。

## 4. 研究成果

M. Kaluba 及び P. Nowak との共同研究では、2013年に研究代表が作用素環論を利用した関数解析的群論的手法により発見した剛性 (Kazhdan の性質(T)) の必要十分条件:

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d R_{ij}^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d R_{ij}^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d R_{ij}^2$$

を大規模計算機を用いて検証することで、5次の自由群自己同型群  $G=\text{Aut}(F_5)$  が剛性を持つことを示した。上の式で  $R[G]$  は実係数の群代数で、 $\sum_{k=1}^d (1-s_k)^2 R[G]$  は群  $G$  の生成系  $\{s_1, \dots, s_m\}$  に関するラプラシアンである。上の式は半正定値計画問題なので計算機により解くことが原理的には可能なのであるが、実際には規模が大きすぎて計算機で有効に解くことが不可能であることが多い。5次の自由群自己同型群の場合、問題となる半正定値計画問題は 4641 次の正方行列に関するもので制約条件が一千万ほどのものである。M. Kaluba 及び P. Nowak との共同研究では、半正定値計画問題の持つ対称性を利用して対称的半正定値計画問題に帰着することで問題の規模を次元・制約条件ともに百分の一以下にしてこの困難を乗り越えた。論文は『Mathematische Annalen』に掲載された。M. Kaluba と P. Nowak らはその後、 $d>5$  についても  $d$  次の自由群自己同型群  $\text{Aut}(F_d)$  が剛性を持つことを証明している。

積置換ランダムウォークがカットオフを持つことを証明することを目指し、更に一般に、エクспанダーランダムウォークがカットオフを持つことの証明を目指した。これまでのカットオフ現象の研究では当然ながら確率論的な手法がとられてきたが、本研究計画では関数解析学的手法を取り確率過程のエントロピーに対する新たな解釈を持ち込むことにより、カットオフ現象の簡明かつ概念的な証明を得た。この手法は、現時点では、一般のエクспанダーランダムウォークに適用できるほど強力ではないがラマヌジャンランダムウォークには適用可能なものである。論文は『Electronic Communications in Probability』に掲載された。

本研究計画のそのほかの成果としては以下のようなものがある。J. Bannon 及び A. Marrakchi との共同研究で充満 von Neumann 因子環に関する 1986 年の S. Popa の予想を解決した。また、これまで提案されてきた部分 von Neumann 環に対する余従順性の条件がすべて一致することを証明した。従順性は von Neumann 環論において中心的な位置を占める概念であり、幾つもの条件が一致するという A. Connes の定理は von Neumann 環論の柱石となっている。余従順性に関するこの度の成果はこれを一般化するものである。論文は『Communications in Mathematical Physics』に掲載された。M. Mori との共同研究ではバナッハ空間の距離幾何学に関するティングレー、マズール・ウラム問題で成果を挙げた。作用素環がマズール・ウラムの性質を持つというこれまでの多くの定理を纏めて一般化する成果である。論文は『Studia Mathematica』に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 N. Ozawa	4. 巻 77
2. 論文標題 An entropic proof of cutoff on Ramanujan graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electron. Commun. Probab	6. 最初と最後の頁 7pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-ECP358	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 M. Kaluba, P. Nowak, N. Ozawa	4. 巻 375
2. 論文標題 Aut(F_5) has property (T).	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 1169--1191
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-019-01874-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 N. Ozawa and Y. Suzuki	4. 巻 27
2. 論文標題 On characterizations of amenable $C^*$ -dynamical systems and new examples	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 No. 92, 21pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-021-00699-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 J. Bannan, A. Marrakchi, and N. Ozawa	4. 巻 378
2. 論文標題 Full factors and co-amenable inclusions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1107--1121
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-020-03816-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Mori and N. Ozawa	4. 巻 250
2. 論文標題 Mankiewicz's theorem and the Mazur--Ulam property for $C^*$ -algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 265--281
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm180727-14-11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Anoussis, N. Ozawa, and I. G. Todorov	4. 巻 147
2. 論文標題 Norms of vector functionals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 2057--2068
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14383	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. De Chiffre, N. Ozawa, and A. Thom	4. 巻 65
2. 論文標題 Operator algebraic approach to inverse and stability theorems for amenable groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 98--118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0025579318000335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa	4. 巻 126
2. 論文標題 $C^*$ -simplicity and the unique trace property for discrete groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.	6. 最初と最後の頁 35--71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10240-017-0091-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Okayasu, N. Ozawa, R. Tomatsu	4. 巻 121
2. 論文標題 Haagerup approximation property via bimodules	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Scand.	6. 最初と最後の頁 75--91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7146/math.scand.a-25970	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計12件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Full factors and co-amenable inclusions
3. 学会等名 Functional Analysis Seminar (UCLA, online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Connes's Embedding Conjecture and Quantum Information Theory
3. 学会等名 QIT Seminar (Yukawa Institute, online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 An entropic proof of cutoff on Ramanujan graphs
3. 学会等名 Wales MPPM Seminar (Cardiff University, online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Kazhdan's property (T) and semidefinite programming
3. 学会等名 岡シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Full factors and co-amenable inclusions
3. 学会等名 $C^*$ -Algebras (Oberwolfach) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Finite-dimensional representations constructed from random walks
3. 学会等名 2018 Spring Probability Workshop, Taipei (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 $\text{Aut}(F_5)$ has Kazhdan's property (T)
3. 学会等名 Approximation Properties in Operator Algebras and Ergodic Theory, IPAM (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Minicourse on Connes's Embedding Problem and its equivalent
3. 学会等名 Winter school on Connes' embedding problem and quantum information theory, Oslo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 The Furstenberg boundary and $C^*$ -simplicity
3. 学会等名 Boundaries of topological groups with applications to Lyapounov exponents, symmetric spaces, and $C^*$ -algebras, TSIMF (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 $\text{Aut}(F_5)$ has Kazhdan's property (T)
3. 学会等名 Colloquium at UCLA (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Minicourse on Connes's Embedding Problem and its equivalent
3. 学会等名 Analysis in Quantum Information Theory, IHP, Paris (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Narutaka Ozawa
2. 発表標題 Finite-dimensional representations constructed from random walks
3. 学会等名 Operator Algebras and its Application, IPM, Tehran (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Narutaka Ozawa <a href="https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/">https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/</a> Narutaka Ozawa <a href="http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/">http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/</a> Narutaka Ozawa <a href="http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/">http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/</a> Narutaka Ozawa <a href="http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/">http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------